Übung 1.1: Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}(p)$ zum Richtungsvektor $\vec{v} := (1, 7)$ der Funktion $f(x, y) := x^3 + y^2$ beim Punkt p := (1, 2).

Nach 2.3.12 gilt: $D_{\vec{v}}(p) = \langle grad(f)(p), \vec{v} \rangle = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 31.$

Übung 1.2: Gegeben vollständige metrische Räume X, Y ist auch ihr Produkt X × Y vollständig.

Beweis:
Sei $z_n := (x_n, y_n)$ eine Cauchy-Folge in X × Y

$$\begin{aligned} & d(z_n, z_m) = \sup\{d(x_n, x_m), d(y_n, y_m)\} \\ & \Rightarrow \quad d(z_n, z_m) \geq d(x_n, x_m) \wedge d(z_n, z_m) \geq d(y_n, y_m) \\ & \Rightarrow \quad x_n \text{ ist Cauchy-Folge in X und } y_n \text{ ist Cauchy-Folge in Y} \\ & \Rightarrow x_n \to x \text{ und } y_n \to y \text{ (X und Y sind vollständig)} \end{aligned}$$

Behauptung: $z_n \to (x, y)$
Beweis:
$d(z_n, (x, y)) = \sup\{d(x_n, x), d(y_n, y)\} \to 0.$

Übung 1.3: Genau dann ist p Häufungspunkt des metrischen Raums X, wenn es eine Folge x_n in $X \setminus p$ gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$.
Beweis:
Sei p ein Häufungspunkt von X ⇔ Alle Umgebungen U von p schneiden $X \setminus p$
$\Leftrightarrow \exists x_n \in (X \setminus p) \cap B(p, \frac{1}{n}) \forall n \in \mathbb{N}$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$, da $d(x_n, p) \leq \frac{1}{n}$.

Übung 1.4: Gegeben ein Banachraum V und $h \in B(V)$ ein stetiger Endomorphismus von V einer Operatornorm $\|h\| < 1$ konvergiert die Folge der Partialsummen der geometrischen Reihe und der Grenzwert ist invers zu $id_V - h$.

Beweis:
$\| \sum_{n=0}^{N} h^n - \sum_{n=0}^{M} h^n \| = \| \sum_{n=N+1}^{M} h^n \| \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|h\|^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} \|h\|^n$ konvergiert, somit ist $H := \sum_{n=0}^{\infty} h^n$ eine Cauchy-Folge und konvergiert somit.

Behauptung: $H = (id - h)^{-1}$
Beweis:
$\lim\limits_{N\to\infty} (id - h) \sum_{n=0}^{N} h^n = \lim\limits_{N\to\infty} (id - h^{N+1}) = id$, da $\|h\|^{N+1} \to 0$

Behauptung: $f \in B(V)$ mit $\|f - id\| < 1$
Beweis: $id - (id - f) = f$.

Übung 1.5: Man zeige, dass jede gleichmäßig stetige Abbildung f von einer Teilmenge A eines metrischen Raums X in einen vollständigen metrischen Raum Y auf genau eine Weise zu einer stetigen Abbildung auf den Abschluss von A in X fortgesetzt werden kann.

Beweis per Konstruktion von der Fortsetzung g von f
$g(a) = f(a) \forall a \in A$
Nach der Übung 1.3 gilt: $\forall a \in \overline{A} \setminus A$ gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in}$ in A die gegen a konvergiert.
Setzt $g(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$. Dieser Grenzwert existiert, da $f(a_n)$ offensichtlich eine Cauchy-Folge ist und Y vollständig ist. Es gilt also nur noch zu zeigen, dass g gleichmäßig stetig ist.
Sei $\epsilon > 0$, $\forall x, y \in \overline{A}$ mit $d(x, y) < \frac{\delta}{3}$ gilt:
$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$ (Dreiecksungleichung)
Wobei $x_n, y_n \in A \forall n \in \mathbb{N}, x_n \to x, y_n \to y$
Somit kann man n groß genug wählen, damit $d(x_n, x) < \frac{\delta}{3}$ und $d(y, y_n) < \frac{\delta}{3}$ gilt.
$\Rightarrow d(x_n, y_n) < \delta$
Es gilt: $d(g(x), g(y)) \leq d(g(x), f(x_n)) + d(f(x_n), f(y_n)) + d(f(y_n), g(y))$
Da f gleichmäßig stetig ist und $f(x_n) \to g(x), f(y_n) \to g(y)$ gilt, gilt:
$d(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon, d(f(y_n), g(y)) < \epsilon, d(g(x), f(x_n)) < \epsilon$
$\Rightarrow d(g(x), g(y)) < 3\epsilon$
Offensichtlich ist mit δ zu dem ϵ zu wählen und man kann dieses auch so wählen, dass am Ende ϵ anstatt 3ϵ herauskommt, jedoch wäre das eine Definier-Schlacht und ich denke man kann den Beweis so besser verstehen.