Blatt 2

Übung 2.1. Berechnen Sie die Jacobimatrix der Kugelkoordinatenabbildung

$$\begin{array}{rccc} K: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\vartheta,\varphi) & \mapsto & (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta) \end{array}$$

Drücken sie die Länge des Geschwindigkeitsvektors in $\mathbb{R}^3$ eines sich auf der Einheitskugel bewegenden Käfers $\kappa : t \mapsto K(1,\vartheta(t),\varphi(t))$ durch $\vartheta, \varphi, \vartheta', \varphi'$ aus.

Wir betrachten $\kappa(t) = K(1, \Theta(t), \varphi(t))$

Zur Vereinfachung der Darstellung von κ definieren wir die Kurve $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ an, wobei gilt:

$$\begin{array}{rl} \gamma: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ & t \mapsto (1, \Theta(t), \varphi(t)) \end{array}$$

Es gilt: $\kappa(t) = K(1, \Theta(t), \varphi(t)) = K \circ \gamma(t)$

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsvektors, (siehe Bsp 2.4.7):

$$\kappa'(t) = d_{\kappa(t)} K \cdot \gamma'(t)$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot\Theta(t) \\ \dot\varphi(t) \end{pmatrix}$$

$$dK = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\Theta & r\cos\varphi\cos\Theta & -r\sin\varphi\sin\Theta \\ \sin\varphi\sin\Theta & r\sin\varphi\cos\Theta & r\cos\varphi\sin\Theta \\ \cos\Theta & -r\cdot\sin\Theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot k(t) = k' \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t)$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos\varphi \cos\theta \cdot \dot{\theta}(t) - r\sin\varphi \sin\theta \cdot \dot{\varphi}(t) \\ r\sin\varphi \cos\theta \ \dot{\theta}(t) + r\cos\varphi \sin\theta \ \dot{\varphi}(t) \\ r \cdot - \sin\theta \cdot \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Länge des Geschwindkeitsvektors:

$\mathcal{L}(k(t)) = |k'(t)|$

$|k'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$$= r \cdot \sqrt{\dot{\theta}(t)^2 + (\sin\theta(t) \cdot \dot{\varphi}(t))^2} \overset{r=1}{=} \sqrt{\dot{\theta}(t) + (\sin(\theta(t)) \cdot \dot{\varphi}(t))^2}$$

Übung 2.2. Seien X, Y endlichdimensionale normierte reelle Räume. Sei $A \subset X$ halboffen und $f : A \to Y$ differenzierbar. Man zeige: Liegt für zwei Punkte $p, q \in A$ das ganze verbindende Geradensegment $[p, q]$ in A und ist die Operatornorm des Differentials von f auf $[p, q]$ beschränkt durch eine Konstante K, in Formeln $\| \mathrm{d}_x f \| \leq K \ \forall x \in [p, q]$, so gilt $\|f(p) - f(q)\| \leq K\|p - q\|$. Hinweis: Schrankensatz aus Analysis 1.

Erinnerung:

- Eine Menge $A \subset X$ heißt halboffen, falls gilt:
  $\forall a \in A \ \exists U$ offen sd. $a + tU \subset A \quad \forall t \in [0,1]$
- Schrankensatz: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ diffbar
  Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und falls $\gamma'(t) \in C$ f.a. $t \in [a,b]$
  dann gilt: $\gamma(b) - \gamma(a) \in (b-a)\,C$

Bew: Wir definieren uns $\gamma \in C^1([0,1], Y \simeq \mathbb{R}^n)$ (da Y endl. dimensionaler VR)

sodass gilt: $\{tp + (1-t)q\} \subset A \ \forall t \in [0,1]$, $p, q \in A$

$\gamma(t) = f(tp + (1-t)q) = f(q + t(p-q))$

$\gamma'(t) = df \cdot (p-q)$

$\|\gamma'(t)\| = \| df \ (p-q) \| \leq \|df_x\| \ \|p-q\| \leq K \cdot \|p-q\|$

$\gamma'(t) \in B(0, k \cdot \|p-q\|)$ ($B(0, k \cdot \|p-q\|$ ist nach 0.3 konvex)

Schrankensatz $\Rightarrow$ $\gamma(1) - \gamma(0) \in (1-0)\, B(0, k \cdot \|p-q\|) = B(0, k \cdot \|p-q\|)$

$\Leftrightarrow f(q) - f(p) \in B(0, k \cdot \|p-q\|)$

$\Rightarrow \| f(q) - f(p) \| \leq k \cdot \|p-q\|$

$\square$

Übung 2.3. Sei $\mathrm{inv} : \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n \times n;\mathbb{R})$ das Invertieren von Matrizen, $\mathrm{inv}(X) = X^{-1}$. Man zeige für das Differential des Invertierens bei der Einheitsmatrix I die Formel $\mathrm{d}_I \,\mathrm{inv} : H \mapsto -H$. Man zeige allgemeiner, daß das Differential dieser Abbildung am Punkt P gegeben wird durch

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}_P \,\mathrm{inv} : & \mathrm{Mat}(n \times n;\mathbb{R}) & \to & \mathrm{Mat}(n \times n;\mathbb{R}) \\ & H & \mapsto & -P^{-1} H P^{-1} \end{array}$$

Hinweis: Man erinnere die Darstellung des Inversen durch eine Reihe aus Übung 1.4 und die Identität $(\cdot P^{-1}) \circ \mathrm{inv} \circ (P^{-1} \cdot) = \mathrm{inv}$.

1) z.z.: $d_I \,\mathrm{inv}(H) = -H$

Bew:

Erinnerung: (letzte Übung 1.4: Für $h \in B(V)$, V normierter VR, $\|h\| < 1$, gilt $\sum_{n=0}^{\infty} h^n = (\mathrm{Id}_V - h)^{-1}$

Betrachte $\gamma(t) = \mathrm{Id} + tH$, $\gamma'(t) = H$, insb. $\gamma'(0) = H$

$$d_I \operatorname{inv}(H) = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{inv}(Id + tH) - Id}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{inv}(Id - t \cdot (-H)) - Id}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} t^n \cdot (-H)^n - Id}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} t^n \cdot (-H)^n}{t} = \lim_{t \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} (-H)^n$$

$$= -H + \underbrace{\lim_{t \to 0} \sum_{n=2}^{\infty} t^{n-1} (-H)^n}_{=0} = -H$$

2) z.z.: $d_P \operatorname{inv}(H) = -P^{-1} H P^{-1}$

Sei $\gamma(t) = P + tH$

$$d_P \operatorname{inv}(H) = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{inv}(P + tH) - P^{-1}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(\cdot P^{-1}) \circ \operatorname{inv} \circ (P^{-1} \cdot)(P + tH) - P^{-1}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(\cdot P^{-1}) \circ \operatorname{inv} \circ (Id + P^{-1} t \cdot H) - P^{-1}}{t}$$

$\| P^{-1} tH \| \overset{t \to 0}{\leq} 1$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(\cdot P^{-1}) \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} (P^{-1} t (-H))^n \right) - P^{-1}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} (P^{-1} t (-H))^n \cdot P^{-1} \right) - P^{-1}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (P^{-1} t (-H))^n \cdot P^{-1}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (P^{-1})^n t^{n-1} (-H) \cdot P^{-1}$$

$$= -P^{-1} \cdot H \cdot P^{-1} + \underbrace{\lim_{t \to 0} \sum_{n=2}^{\infty} (P^{-1})^n t^{n-1} (-H) \cdot P^{-1}}_{=0}$$

$$= -P^{-1} H \cdot P^{-1}$$

Übung 2.4. Wir setzen als klar voraus, daß die Kugelkoordinatenabbildung eine Bijektion $K : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \xrightarrow{\sim} U \Subset \mathbb{R}^3$ auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist und die Umkehrabbildung $K^{-1} : U \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Man berechne die Jacobimatrix von K^{-1} an der Stelle $(-3, 0, 0)^\top$.

Da wir wissen, dass die Kugelabbildung $K : (0,\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \xrightarrow{\sim} U \Subset \mathbb{R}$ eine Bijektion ist und ihre Umkehrabbildung $K^{-1} : U \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar können wir Kettenregel nutzen

$$\mathrm{Id} = d\, \mathrm{Id}_V = d\,(K \circ K^{-1}) = d_{K^{-1}(p)} K \circ d_p K^{-1}$$

$$\Longrightarrow d_{K^{-1}(p)} K = (d_p K^{-1})^{-1}$$

Wir bestimmen $K^{-1}(-3, 0, 0) = (3, \frac{\pi}{2}, \pi)$

$$d_{(3, \frac{\pi}{2}, \pi)} K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_{(-3,0,0)}K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Ergänzende Übung 2.5. Man zeige, daß das Invertieren komplexer Zahlen Winkel erhält. Sind genauer $\gamma, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ differenzierbar mit $\gamma(0) = \psi(0)$ und $\gamma'(0) \neq 0$ und $\psi'(0) \neq 0$, so nennen wir den Betrag des Winkels zwischen $\gamma'(0)$ und $\psi'(0)$ den Schnittwinkel unserer Kurven und Sie sollen zeigen, daß $\mathrm{inv} \circ \gamma$ und $\mathrm{inv} \circ \psi$ denselben Schnittwinkel haben für $\mathrm{inv} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ das Invertieren $z \mapsto z^{-1}$.

Wir wollen zeigen: Sei $\xi = d_{\gamma(0)}\,\mathrm{inv}$, $v, w \in \mathbb{R}^2$ so soll gelten

: $\text{Winkel}(v,w) = \text{Winkel}(\xi(v), \xi(w))$

$$\mathrm{inv}(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$$

wir fassen dies als zweidim Fkt $\mathrm{inv} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$x+iy \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{+2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2-x^2 & -2xy \\ +2xy & y^2-x^2 \end{pmatrix}$$

Sei $R := \frac{1}{(x^2+y^2)}$, $a = y^2-x^2$, $b = 2xy$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^2}(a+ib)(x+iy) = (ax-by)+i(ay+bx)$$

sei nun $v = x + iy$

$w = \tilde{x} + i\tilde{y}$

$$\text{Winkel}(v, w) =$$

$$\text{Winkel}\left(\frac{1}{R^2}\cdot(a+ib)(x+iy), \frac{1}{R^2}(\tilde{a}+i\tilde{b})(\tilde{x}+i\tilde{y})\right)$$