Analysis 2
Sommersemester 2023
Musterlösung Blatt 3

Übung 3.1

Beweis des Hinweises

Wie im Hinweis betrachten wir $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $\partial_x \partial_y g(x, y) = 0$
Es muss also $\partial_y g(x, y)$ unabhängig von x sein; wir definieren also $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$r(y) := \partial_y g(x, y)$$

Somit ist r einmal stetig differenzierbar.
Wir definieren $k(y) := \int_0^y r(z)dz$ zweimal stetig differenzierbar und es gilt

$$\partial_y k(y) = r(y)$$

Es gilt also $\partial_y(g(x, y) - k(y)) = 0$ also ist $h(x) := g(x, y) - k(y)$ nur von x abhängig und die Subtraktion zweier zwei mal stetig partiell differenzierbarer Funktionen und somit auch zwei mal stetig differenzierbar.
Insgesamt erhalten wir also $g(x, y) = h(x) + k(y)$ wie im Hinweis.

Beweis der Aufgabe

Wir meinen mit $d_x f := \frac{df}{dx}$ und betrachten $f(x, y)$
Wir hätten gerne, dass $f(x, y) = h(x-y)+k(x+y)$ also $f(x, y) = g(x-y, x+y)$ mit g wie im Hinweis. Also definieren wir $g(x, y) := f(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2})$
Wir meinen im folgenden immer f und seine Derivate an der Stelle $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$, lassen diese aber weg, um die Notation zu verkürzen. Dann gilt nun:

$$\begin{aligned}
&\partial_x \partial_y g(x, y) \\
&= d_x d_y f \\
&= d_x \left(\frac{1}{2} \partial_x f + \frac{1}{2} \partial_y f \right) \\
&= \frac{1}{4} \partial_x^2 f - \frac{1}{4} \partial_y \partial_x f + \frac{1}{4} \partial_x \partial_y f - \frac{1}{4} \partial_y^2 f \\
&= \frac{1}{4} \left(\partial_x^2 f - \partial_y^2 f \right) \\
&= 0 && \text{Da } \partial_x^2 f = \partial_y^2 f
\end{aligned}$$

g ist also tatsächlich wie im Hinweis also gilt $g(x, y) = h(x) + k(y)$ also
$f(x, y) = g(x - y, x + y) = h(x - y) + k(x + y)$

Übung 3.2

$\cos(z) \sim_3 1 - \frac{z^2}{2}$
Da $(1-\frac{z^2}{2})(1+\frac{z^2}{2}) \sim_3 1$ gilt also $\frac{1}{\cos(z)} \sim_3 1+\frac{z^2}{2}$ somit $\frac{1}{\cos(xy)} \sim_3 1+\frac{(xy)^2}{2} \sim_3 1$
Insgesamt gilt also

$$\frac{\sqrt{1+x+y^2}}{cos(xy)} \sim_3 \sqrt{1+x+y^2}$$

Für $g(z) := \sqrt{1+z}$ gilt
$g'(z) = \frac{1}{2}(1+z)^{-\frac{1}{2}}$ und $g''(z) = -\frac{1}{4}(1+z)^{-\frac{3}{2}}$ und $g'''(z) = \frac{3}{8}(1+z)^{-\frac{5}{2}}$

Wir erhalten somit

$$g(z) \sim_3 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3$$

Insgesamt:

$$\frac{\sqrt{1+x+y^2}}{cos(xy)} \sim_3 \sqrt{1+x+y^2} \sim_3 1+\frac{1}{2}(x+y^2)-\frac{1}{8}(x+y^2)^2+\frac{1}{16}(x+y^2)^3 \sim_3 1+\frac{x}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{xy^2}{4}+\frac{1}{16}x^3$$

Übung 3.3

Wir untersuchen für $Q := [0,1] \times [0,1]$ $f|_Q$ auf sein globales Maximum und Minimum.

Extremstellen in Q

$\partial_x f(x,y) = 2x + 2y - 2$
$\partial_y f(x,y) = 10y + 2x - 4$
Wir suchen also (x,y) mit $x + y = 1$ und $5y + x = 2$ und erhalten als einzige Lösung $(x,y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$

Extremstellen am Rand

$f(1,y) = 5y^2 - 2y - 1$ hat die Extremstelle $(1, \frac{1}{5}) \in Q$
$f(0,y) = 5y^2 - 4y$ hat die Extremstelle $(0, \frac{2}{5}) \in Q$
$f(x,0) = x^2 - 2x$ hat die Extremstelle $(1,0) \in Q$
$f(x,1) = x^2 + 1$ hat die Extremstelle $(0,1) \in Q$

Globales Minimum und Maximum

Wir wissen nun also, dass sich das globale Minimum und Maximum an einer der Extremstellen befinden oder an einem Eckpunkt.
Wir berechnen alle Werte:

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0\\
f(1,0) &= -1\\
f(0,1) &= 1\\
f(1,1) &= 2\\
f(0,\frac{2}{5}) &= -\frac{4}{5}\\
f(1,\frac{1}{5}) &= -\frac{6}{5}\\
f(\frac{3}{4},\frac{1}{4}) &= -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Das globale Minimum auf Q ist also bei $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ mit $-\frac{5}{4}$
und das globale Maximum auf Q ist bei $(1,1)$ mit 2

Übung 3.4

Wir definieren:
$A := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u+v-uv)^n}{n} = \sum_{i,j\geq 0}^{\infty} a_{ij}u^iv^j$
$B := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n+v^n}{n} = \sum_{i,j\geq 0}^{\infty} b_{ij}u^iv^j$

Taylorentwicklung:

$$\log(1-z) \sim_m -\sum_{n=1}^{m} \frac{z^n}{n} \text{ also } \log(1-u)+\log(1-v) \sim_m -\sum_{n=1}^{m} \frac{u^n+v^n}{n}$$

und

$$\log(1-u-v+uv) \sim_m -\sum_{n=1}^{m} \frac{(u+v-uv)^n}{n}$$

Es gilt also $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq m}} a_{ij}u^iv^j \sim_m A \sim_m \log(1-u)+\log(1-v) = \log(1-u-v+uv) \sim_m B \sim_m \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq m}} b_{ij}u^iv^j$$

Also $\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq m}} a_{ij}u^iv^j = \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq m}} b_{ij}u^iv^j$ und wir erhalten $a_{ij} = b_{ij}\ \forall i,j \geq 0$