Lösungsvorschlag Blatt 4

Übung 4.1. Man zeige: Eine stetig differenzierbare Abbildung von einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Raum hat offenes Bild, wenn ihr Differential an jeder Stelle surjektiv ist. Ist unsere stetig differenzierbare Abbildung zusätzlich injektiv, so liefert sie einen Diffeomorphismus unserer offenen Teilmenge mit ihrem Bild.

Sei $U \circleddash \mathbb{R}^m$, $f: U \to \mathbb{R}^k$ stetig diff'bar.

1) $\underline{z}$: Wenn d_pf surjektiv f.a. $p \in U$, dann hat f offenes Bild, also $f(U) \circleddash \mathbb{R}^k$.

<u>Bew.:</u>

Nach Def. ist d_pf eine $(k \times m)$-Matrix.

$\overset{d_pf \text{ surj.}}{\Longrightarrow}$ Es gibt k Spalten von d_pf, die das Bild erzeugen.

Seien dies o.B.d.A. die ersten k Spalten von f. Wir def. $j: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$,

$(x_1, \dots, x_k) \mapsto p + (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$. Dann gilt

$$d_0(f \circ j) = d_pf \circ d_0 j = d_pf \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline & 0 & \end{pmatrix}}_{k} \begin{matrix} \}k \\ \\ \}m-k \end{matrix}, \quad \text{also } d_0(f \circ j) \text{ bijektiv.}$$

Nach dem Umkehrsatz ist $f \circ j$ dann lokaler Diffeomorph. zwischen einer Umgebung $V \circleddash \mathbb{R}^k$ von 0 und einer Umgebung $Z \circleddash \mathbb{R}^k$ von $(f \circ j)(0) = f(p)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & & \mathbb{R}^k \\ \circleddash & & \circleddash \\ V & \xrightarrow{f \circ j} & Z \\ \Psi & & \Psi \\ 0 & & f(p) \end{array}$$

Es folgt $Z \subset f(U)$, also $f(U) \circleddash \mathbb{R}^k$.

$\square$

2) Sei f nun zusätzlich injektiv.

<u>Erinnerung:</u> Prop. 4.2.15: $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $h: U \to \mathbb{R}^k$ stetig diff'bar, $d_p h$ surj. f.a. $p \in U$.

Dann ist $h^{-1}(c)$ $m-k$-dimensionale Mannigfaltigkeit f.a. $c \in \mathbb{R}^k$.

<u>z:</u> f liefert Diffeomorphismus.

<u>Bew.:</u>

Es gilt $\dim(f^{-1}(c)) = 0$ f.a. c, da f injektiv.

$\overset{4.2.15}{\Longrightarrow}$ $m = k$

Also folgt mit der Surjektivität von $d_p f$, dass $d_p f$ auch bijektiv ist.

Nach dem Umkehrsatz ist f dann lokaler Diffeomorphismus.

Wir def. $f^{-1}: f(U) \to U$, $f(p) \mapsto p$ (wohldef. da f injektiv).

Da f lokaler Diffeomorph. f.a. $p \in U$, ist f^{-1} diff'bar.

f, f^{-1} sind also diff'bare Inverse. $\square$

Übung 4.2 (**Mannigfaltigkeiten als Graphen in Koordinaten**). Man zeige: Gegeben eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \Subset \mathbb{R}^n$ und eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ derart, daß $M \cap U$ unter der entsprechenden Permutation der Koordinaten dem Graph einer $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f : \mathbb{R}^k \Supset W \to \mathbb{R}^{n-k}$ entspricht. Hinweis: Man gehe vom Satz über implizite Funktionen aus.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimensionale Mannigfaltigkeit.

$\underline{\text{z}}$: $\forall p \in M \ \exists U \Subset \mathbb{R}^n, \sigma \in S_n : \quad M \cap U = \Gamma(f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k})$.

Erinnerung:

Satz 4.3.4 (über implizite Funktionen, geometrische Fassung) liefert für $X \hat{=} \mathbb{R}^k, Y \hat{=} \mathbb{R}^{n-k}$:

$M \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $(p,q) \in M$. Liefert $\pi: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ eine Surjektion $T_{(p,q)}M \to X$, so ist M lokal ein C^1-Graph um (p,q).

Bew.:

Es gilt $\dim T_pM = k$, $T_pM \subset \mathbb{R}^n$.

Wir können eine Basis $(v_i)_{i \in \{1,\dots,k\}}$ von T_pM finden. Der Rang der zusammengesetzen Matrix der Basisvektoren $(v_1 | \cdots | v_k)$ ist dann k:

$$\operatorname{rang} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{pmatrix}}_{k} \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} = k .$$

Es ex. also k Zeilen, s.d. die entsprechende Untermatrix bijektiv ist. Seien dies o.B.d.A. die ersten k Zeilen.

Sei $\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ die Projektion über die ersten k Koordinaten. Dann liefert π eine Surjektion $T_pM \to \mathbb{R}^k$, weil $\pi(v_j) = \begin{pmatrix} v_{j1} \\ \vdots \\ v_{jk} \end{pmatrix}$.

Mit Satz 4.3.4 folgt dann sofort die Behauptung. $\square$

Übung 4.3. Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle\ ,\ \rangle$ eine Bilinearform auf V und $c \neq 0$ eine reelle Konstante, so ist $\{v \in V \mid \langle v, v\rangle = c\}$ eine Hyperfläche in V. Hinweis: Man verwende die Formel für das Differential bilinearer Abbildungen 2.6.5, die in der Vorlesung nicht bewiesen wurde.

Sei V endlichdim. $\mathbb{R}$-VR, $\langle\ ,\ \rangle$ eine Bilinearform auf V, $c \neq 0$, $X := \{v \in V \mid \langle v,v\rangle = c\}$.

Z: X Hyperfläche in V, also $\operatorname{codim}(X) = 1$.

Bew.:

Sei $U \in V$. Wir def. $h: U \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \langle v,v\rangle$, $\Delta: V \to V \times V$, $v \mapsto (v,v)$,

$b: V \times V \to \mathbb{R}$, $(v,w) \mapsto \langle v,w\rangle$. Dann gilt $h = b \circ \Delta$.

Die Abb. Δ ist dann linear, also $d\Delta = \Delta$. Weiter gilt nach 2.6.5

$$d_{\binom{v}{w}} b(v',w') = b(v',w) + b(v,w') = \langle v',w\rangle + \langle v,w'\rangle .$$

Es folgt

$$d_v h(w) = d_{\binom{v}{v}} b \circ \Delta(w) = d_{\binom{v}{v}} b(w,w) = \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle .$$

Sei nun $U := \{v \in V \mid \langle v,v\rangle \neq 0\}$. Insbesondere ist $X \subset U$.

$d_v h$ ist dann surjektiv f.a. $v \in U$, da $d_v h(v) = 2\langle v,v\rangle \neq 0$

Nach Prop. 4.2.15 ist $X = h^{-1}(c)$ dann $m-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit, also Hyperfläche in V. $\square$

Übung 4.4. Man bestimme in den beiden vorhergehenden Übungen die Tangentialräume von $\Gamma(f)$ beziehungsweise $\{v \in V \mid \langle v, v \rangle = c\}$.

1) Bestimme $T_p\Gamma(f)$.

Es gilt $\Gamma(f) = \{(x,y) \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^n$, sowie

$T_pM = \langle \dot{\gamma}(0) \mid \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \gamma(0) = p \rangle$.

Außerdem ist $\dim \Gamma(f) = \dim T_p\Gamma(f) = k$ (nach 4.2).

Sei $\gamma_j(t) := (x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_k)) \in \Gamma(f)$. Dann ist

$$\dot{\gamma}_j(0) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-j}, \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x), \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x), \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)).$$

$\implies \dot{\gamma}_1(0), \dots, \dot{\gamma}_k(0)$ sind linear unabhängig.

$\implies T_p\Gamma(f) = \langle \dot{\gamma}_1(0), \dots, \dot{\gamma}_k(0) \rangle$.

2) Bestimme T_pX für $X := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = c\}$

Wir def. $h: V \to \mathbb{R}$, $h(v) = \langle v, v \rangle$.

Für jede Kurve γ ist ist $h \circ \gamma$ konstant, also $d_vh \circ \dot{\gamma}(0) = 0$.

$\implies T_pX \subset \text{Kern}(d_vh)$

Es gilt aber $\dim(\text{Kern}(d_vh)) = \dim V - 1$, also folgt schon

$T_pX = \text{Kern}(d_vh) = \{w \in V \mid \langle w, v \rangle + \langle v, w \rangle = 0\}$.