Analysis 2

Übungsblatt 9

Lösungsskizze

29. Juni 2023

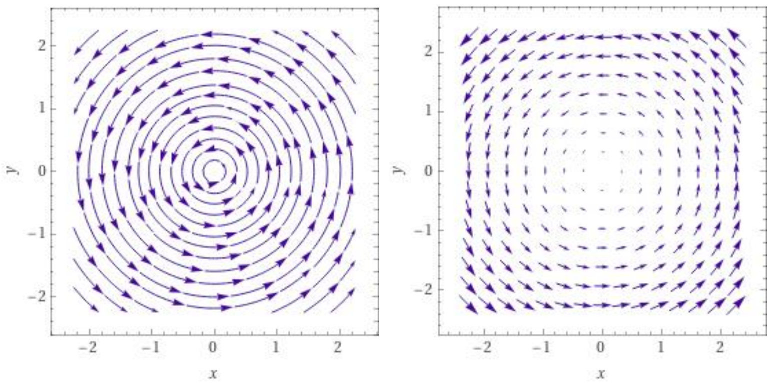
Übung 9.1

Man zeige für jedes Vektorfeld $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $A(p) \perp p \forall p \in \mathbb{R}^n$ dass seine Flusswege γ auf Sphären mit Zentrum im Ursprung verlaufen müssen, in Formeln $||\gamma(t)||$ konstant.

Beweis.

$$||\gamma(t)|| konstant \Leftrightarrow ||\gamma(t)||^2 konstant \Leftrightarrow \langle \gamma(t), \gamma(t)\rangle konstant \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\langle \gamma(t), \gamma(t)\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\langle \gamma(t), \gamma(t)\rangle \\ Produktregel &= \langle \gamma(t)', \gamma(t)\rangle + \langle \gamma(t), \gamma(t)'\rangle = 2\langle \gamma(t)', \gamma(t)\rangle \\ &= 2\langle A(\gamma(t)), \gamma(t)\rangle \\ A(p) \perp p &= 0 \end{aligned}$$



$A : (x, y) \mapsto (-y, x)$ WolframAlpha

□

Übung 9.2

Sei $A : U \to \vec{X}$ U offene Teilmenge von X affiner Raum und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Man zeige: Gilt für die Richtungsableitung $(D_{A(p)}f)(p) \geq 0 \quad \forall p \in U$ so ist $f(\gamma(t))$ monoton wachsend für alle Flusswege γ unseres Vektorfeldes.

Beweis.
zu zeigen: $f(\gamma(t))' \geq 0$

$$\begin{aligned} f(\gamma(t))' &= d_{\gamma(t)}f \cdot \gamma'(t) \\ &= \underbrace{d_{\gamma(t)}f}_{totale Ableitung} \cdot \underbrace{A(\gamma(t))}_{Richtungsvektor} = \underbrace{D_{A(\gamma(t))}f(\gamma(t))}_{Richtungsableitung} \geq 0 \end{aligned}$$

vgl. hierzu 2.3.12. den zweiten Teil (allgemeiner Fall). Skript
□

Lösungsvorschlag Blatt 9 Aufgaben 9.3, 9.4.

Übung 9.3. Bestimmen Sie alle Lösungen der linearen Differentialgleichung $y' + y\sin(x) = \cos(x)\sin(x)$.

Wir bemerken zunächst, dass die DGL inhomogen ist, d.h. sie ist von der Form $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$. Der homogene Fall ist die DGL $\tilde{y}'(x) = -\tilde{y}(x)\sin(x)$ mit der Lösung $\tilde{y}(x) = e^{\cos(x)}$.

Mit "Variation der Konstanten" erhalten wir

$$y(x) = c(x)\,e^{\cos(x)}.$$

$$\Rightarrow y'(x) = -c(x)e^{\cos(x)}\sin(x) + c'(x)e^{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow y(x) = c(x)e^{\cos(x)} \text{ Lösung gdw. } c'(x) = e^{-\cos(x)}\cos(x)\sin(x).$$

Wir berechnen

$$c(x) = \int e^{-\cos(x)}\cos(x)\sin(x)\,dx$$

$$\overset{t=\cos(x)}{=} \int -t e^{-t}\,dt$$

$$\overset{\text{Part. Int.}}{=} t e^{-t} - \int e^{-t}\,dt$$

$$= te^{-t} + e^{-t} + C \overset{\text{Resub}}{=} (\cos(x)+1)\,e^{-\cos(x)} + C.$$

$$\Rightarrow y(x) = \left((\cos(x)+1)\,e^{-\cos(x)} + C\right)e^{\cos(x)}$$

$$= \cos(x) + 1 + Ce^{\cos(x)} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Übung 9.4. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $A(p) \in \mathbb{R}^2 \times 0\ \forall p \in \mathbb{R}^2 \times 0$ liegt jede Flußkurve, die die xy-Ebene $\mathbb{R}^2 \times 0$ trifft, bereits ganz in der xy-Ebene.

Z.: Wenn γ Flussweg ist, der $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ trifft, dann ist γ in $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ enthalten.

Bew.:

Sei $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $B = \pi \circ A \circ i$, wobei $i : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,y)$. B ist stetig diff'bar.

Sei γ Flussweg, s.d. $\gamma(t) \in p \times \{0\}$ für ein $p \in \mathbb{R}^2$.
Wir können dann einen Flussweg β von B mit AW $p \in \mathbb{R}^2$ finden, es gilt dann also $\dot\beta(t) = B(\beta(t))$.

$\Rightarrow (\beta(t), 0)$ Flussweg von A.

Mit dem Satz von Picard-Lindelöff folgt die Eindeutigkeit der Flusswege, also gilt $\gamma(t) = (\beta(t), 0)$. $\square$