Musterlösung zu den Anwesenheitsaufgaben in der dritten Vorlesungswoche

__Übung 0.7__ Z.z.: Gegeben ein topologischer Raum X und $B \subset D \subset X$, haben wir die Äquivalenz

$$B \subseteq_A D \iff \exists A \subseteq_A X \text{ mit } B = A \cap D. \qquad (1)$$

Ferner haben wir, gegeben ein topologischer Raum X und $B \subset D \subseteq_A X$, die Äquivalenz

$$B \subseteq_A D \iff B \subseteq_A X \qquad (2)$$

__Bew.__ Zunächst zeigen wir (1):

$\Rightarrow$) Sei $B \subseteq_A D$. Dann gilt per Definition $D \setminus B \circledcirc D$. Per Definition der Spurtopologie gibt es also ein $\tilde{A} \circledcirc X$ mit $D \setminus B = D \cap \tilde{A}$. Insb. gilt $\underset{A:=}{X \setminus \tilde{A}} \subseteq_A X$.
Mit der ~~Bemerkung~~ Rechnung

$$A \cap D = (X \setminus \tilde{A}) \cap D = (X \cap D) \setminus (\tilde{A} \cap D) \overset{\text{s.o.}}{=} D \setminus (D \setminus B) = B$$

folgt die Behauptung.

$\Leftarrow$) Existiere ein $A \subseteq_A X$ mit $B = A \cap D$. Müssen zeigen, dass dann $B \subseteq_A D$, dass also $D \setminus B \circledcirc D$. Bemerke, dass $X \setminus A \circledcirc X$ per Def. Wir rechnen nun

$$\underset{\text{Def. } \cancel{\text{Produkttop}} \text{ Spurtopo.}}{D \circledcirc} D \cap (X \setminus A) = D \setminus D \cap A \overset{\text{vs}}{=} D \setminus B,$$

also ist $B \subseteq_A D$; insgesamt folgt also die Behauptung. ✓

Jetzt zeigen wir (2):

$\Rightarrow$) Sei also $B \subseteq_A D$. Mit (1) ex. dann ein $A \subseteq_A X$ mit $B = A \cap D$. Da $A, D \subseteq_A X$, ist also $B \subseteq_A X$.

$\Leftarrow$) Sei nun $B \subseteq_A X$. Es gilt $B = B \cap D$; da $B \subseteq_A X$, folgt auch hier mit (1) die Behauptung ✓

$\square$

Übung 0.8 Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter (reeller) Vektorraum.
Wir zeigen, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times V &\xrightarrow{\cdot} V \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda v \end{aligned} \qquad (1)$$

und

$$\begin{aligned} V \times V &\xrightarrow{+} V \\ (v, w) &\mapsto v+w \end{aligned} \qquad (2)$$

stetige Abbildungen sind.

Bew: Wir erinnern uns, dass auf dem Produkt ~~X×Y~~ $X \times Y$ von metrischen Räumen wir standardmäßig von der Metrik gegeben durch $\max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\} =: d((x,x'),(y,y'))$ ausgehen.

Wir zeigen zuerst (1):
Sei $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Wähle $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3|\lambda|}, \frac{\varepsilon}{3\|v\|}, |\lambda|\right\}$ (falls $|\lambda| \neq 0 \neq \|v\|$, sonst ersetze den entsprechenden Wert durch $\frac{\varepsilon}{3}$).
Sei $(\mu, w) \in B((\lambda, v); \delta)$. Dann gilt, dass

$$\|\lambda v - \mu w\| = \|\lambda v - \mu v + \mu v - \mu w\| \leq \|\lambda v - \mu v\| + \|\mu v - \mu w\|$$
$$= |\lambda - \mu| \|v\| + |\mu| \|v - w\| \leq |\lambda - \mu| \|v\| + (|\mu - \lambda| + |\lambda|) \|v - w\|$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{in allen} \\ \text{Fällen}}}{<} \frac{\varepsilon}{3} + (|\lambda| + |\lambda|) \|v - w\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in allen} \\ \text{Fällen}}}{<} \varepsilon,$$

also $\mu w \in B(\lambda v; \varepsilon)$ ✓

Wir zeigen jetzt (2): Sei $(v, w) \in V \times V$ beliebig.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Sei nun $(v', w') \in B((v, w), \delta)$ beliebig, so gilt $\|(v+w) - (v'+w')\| \leq \|v - v'\| + \|w - w'\|$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, also $v' + w' \in B(v+w; \varepsilon)$ ✓

Übung 0.9 Haben die Vorschrift $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+\sin(xyz^2)}}{z}$
Bilden die (formalen) partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{(2x + \cos(xyz^2)\cdot yz^2)}{2\sqrt{x^2+\sin(xyz^2)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{\cos(xyz^2)\cdot xz^2}{2\sqrt{x^2+\sin(xyz^2)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{-\sqrt{x^2+\sin(xyz^2)}}{z^2} + \frac{2xyz\cos(xyz^2)}{2z\sqrt{x^2+\cos(xyz^2)}}$$

$\square$

Übung 0.10

Sei also $R(x,y) = \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j$ ein Polynom in zwei Variablen mit reellen Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{R}$.

ZZ Angenommen, es ex. $\emptyset \neq A \overset{\circ}{\subseteq} \mathbb{R}^2$ derart, dass für alle $p \in A$ gilt: $R(p) = 0$, so ist $c_{ij} = 0$ f.a. i,j.

Bew Unterscheide 2 Fälle:

Fall 1: $(0,0) \in A$: Wir zeigen, dass ein $\varepsilon > 0$ ex., sodass für alle $(x,y) \in B((0,0),\varepsilon)$ gilt, dann f.a. $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_{\geq 0}$

$$\frac{\partial R}{\partial^\alpha x\, \partial^\beta y}(x,y) = 0.$$

Führe dazu eine Induktionsbew. über $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

$\alpha = 0$| Für $\beta = 0$ ist die Aussage trivial ✓ (ε so, dass $B((0,0),\varepsilon) \subset A \overset{\circ}{\subseteq} \mathbb{R}^2$) $\beta \geq 1$: Sei die Aussage für $\beta - 1$ gezeigt und $(x,y) \in B((0,0),\varepsilon)$. Dann gilt:

$$\frac{\partial R}{\partial^\beta y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial R}{\partial^{\beta-1} y}(x,y+h) - \frac{\partial R}{\partial^{\beta-1} y}(x,y)}{h} \underset{\text{nach VS}}{=} 0 \quad ✓$$

für $|h| < \varepsilon - \|(x,y)\|$ beide Werte 0

$\alpha \geq 1$| Sei die Aussage für $\alpha - 1$ gezeigt. (und $\beta \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ bel.)
Nun bemerken wir für $(x,y) \in B((0,0),\varepsilon)$

$$\frac{\partial R}{\partial^\alpha x \, \partial^\beta y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial R}{\partial^{\alpha-1} x \, \partial^\beta y}(x+h,y) - \frac{\partial R}{\partial^{\alpha-1} x \, \partial^\beta y}(x,y)}{h}$$

$$\underset{\substack{\text{nach VS} \\ \text{für } |h| < \varepsilon - \|(x,y)\| \\ \text{beide Werte } 0}}{=} 0 \quad \text{, also folgt die Beh.} \checkmark$$

Insb. gilt also $\frac{\partial R}{\partial^\alpha x \, \partial^\beta y}(0,0) = 0$ f.a. $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_{\geq 0}$!

Nun bemerken wir, dass formal gilt:

$$\frac{\partial (x^i y^j)}{\partial^\alpha x \, \partial^\beta y} = \begin{cases} i \cdot (i-1) \cdot \ldots \cdot (i-\alpha+1) x^{i-\alpha} \cdot j (j-1) \ldots (j-\beta+1) y^{j-\beta}, & \text{für } i \geq \alpha, \ j \geq \beta. \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere gilt somit

$$0 \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{\partial R}{\partial^\alpha x \, \partial^\beta y}(0,0) = k_{\alpha,\beta} \cdot c_{\alpha\beta}$$

wobei $k_{\alpha,\beta} \neq 0$ eine Konstante ist, die durch die Ableitungen der Koeff. kommt. Also insg. $c_{ij} = 0$ f.a. $i, j \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ ✓

Nun betrachten wir Fall 2 : $(0,0) \notin A$.

Da $\emptyset \neq A$, existiert ein Punkt $(a,b) \in A$. Betrachte die Bijektion vom ~~Raum~~ Ring der reellen Polynome in x und y in sich selbst:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[x,y] &\xrightarrow{\phi} \mathbb{R}[x,y] \\ f(x,y) &\longmapsto f(x-a, y-b) \end{aligned}$$

(Bijektiv mit Umkehrabbildung $\begin{aligned} \mathbb{R}[x,y] &\xrightarrow{\phi^{-1}} \mathbb{R}[x,y] \\ f(x,y) &\longmapsto f(x+a, y+b) \end{aligned}$,

rechne $\phi \phi^{-1} = \phi^{-1} \phi = id_{\mathbb{R}[x,y]}$ direkt nach)

Gilt: $\Phi(f\equiv 0) \equiv 0$, also können wir anstelle von $R(x,y)$ auch ~~f~~ $\Phi(R(x,y))$ untersuchen.
Dies verschwindet auf der offenen Menge $A-(a,b) =: \hat{A}$, wobei nun $(q,0) \in \hat{A}$ – wir sind in Fall 1 ✓

Insg. folgt die Behauptung ✓

□

Übung 0.11 Seien V,W normierte Vektorräume.
Sei W vollständig.
ZZ: Dann ist auch $\mathcal{B}(V,W)$ bzgl. der Operatornorm vollständig.
Bew Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(V,W)$.
Wir zeigen zunächst, dass dann ein punktweiser Grenzwert existiert: Bemerke dazu, dass für alle $v\in V$ gilt:

$$\|f_n(v)-f_m(v)\| = \|(f_n-f_m)(v)\| \le \|f_n-f_m\|\,\|v\|,$$

also ist $(f_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ f.a. $v\in V$ eine CF in W und hat wegen der Vollständigkeit nach Voraussetzung einen Grenzwert.
Wir also

$$f: V \longrightarrow W \qquad \text{als Kandidaten}$$
$$v \longmapsto \lim_{n\to\infty} f_n(v)$$

für eine Grenzfunktion. Wir bemerken, dass f linear ist:
Seien $v,w\in V$ und $\lambda\in\mathbb{R}$ beliebig, dann folgt:

$$f(\lambda v+w) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda v+w) \underset{\text{VS, dann } f_n \text{ lin.}}{=} \lim_{n\to\infty} \lambda f_n(v) + f_n(w)$$

$$\underset{\text{beide Grenzwerte ex.}}{=} \lambda \lim_{n\to\infty} f_n(v) + \lim_{n\to\infty} f_n(w)$$

$$= \lambda f(v) + f(w) \quad ✓$$

Wir zeigen jetzt, dass $\sup_{\|v\|\leq 1} \|(f-f_n)(v)\| \xrightarrow[n\to\infty]{}$, dass also f tatsächlich der Grenzwert von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl $\|\cdot\|$ ist.

Sei $v \in \{\|v\| \leq 1\} \subset V$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig.

Es gilt für $N \in \mathbb{N}$, so, dass f.a. $n, m \geq N$ gilt, dass $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, dass für bel. $n \geq N$

die Ungl.

$$\|(f-f_n)(v)\| \underset{VS}{=} \lim_{m\to\infty} \|(f_m - f_n)(v)\| \qquad (1)$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} \|f_m - f_n\| \|v\| \underset{VS}{<} \varepsilon \|v\| \underset{\|v\|\leq 1}{\leq} \varepsilon \text{ gilt.}$$

Insb. ist die Absch. unabh. von $v \in \{\|v\| \leq 1\}$, also folgt, dass $\sup_{\|v\|\leq 1} \|(f-f_n)(v)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Insb. zeigt Ugl. (1), dass für n groß genug $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$, dass also $f_n - f$ stetig ist.

Da auch f_n stetig ist, gilt also, dass

$$f = f_n - (f_n - f)$$

stetig ist.

Insg. folgt die Behauptung.

$\square$