Analysis I - Blatt 1

Aufgabe 1.1.

z.z.: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$

Satz 1.1.23. gibt uns: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ $\quad (*)$

Sei nun $a = 2$ und $b = 1$ dann erhalten wir durch Einsetzen in

$(*)$: $(2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \underbrace{1^{n-k}}_{=1}$

$\Leftrightarrow \quad 3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$

$\square$

Aufgabe 1.2.

z.z.: $(a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i! \cdot j! \cdot k!} a^i \cdot b^j \cdot c^k$

Bew.: $(a+b+c)^n = (a + (b+c))^n$

$$\overset{\text{Satz 1.1.23.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (b+c)^{n-k}$$

$$\overset{\text{Satz 1.1.23.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} b^j \cdot c^{n-k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k}\binom{n-k}{j} a^k b^j c^{n-k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{n!}{\cancel{(n-k)!} \cdot k!} \cdot \frac{\cancel{(n-k)!}}{(n-k-j)! \cdot j!} a^k b^j c^{n-k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{n!}{k!\,(n-k-j)! \cdot j!} a^k b^j c^{n-k-j}$$

$$= \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{k! \cdot i! \cdot j!} a^k b^j c^i$$

$\square$

Aufgabe 1.3.

Wir suchen zuerst eine Formel für $\sum_{i=1}^{n} i^3 - (i-1)^3$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 - (i-1)^3 = (1^3 - 0^3) + (2^3 - 1^3) + \dots + ((n-1)^3 - (n-2)^3) + (n^3 - (n-1)^3)$$

$$= 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 - 0^3 - 1^3 - \dots - (n-2)^3 - (n-1)^3$$

$$= n^3 \quad (*)$$

Beachte nun: $i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} i^3 - (i-1)^3 = \sum_{i=1}^{n} 3i^2 - 3i + 1$$

(*)
$$\Leftrightarrow n^3 = \sum_{i=1}^{n} 3i^2 - 3i + 1$$

$$\Leftrightarrow n^3 = \sum_{i=1}^{n} 3i^2 - \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} 3i^2 = n^3 + \sum_{i=1}^{n} 3i - n \qquad | : 3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \sum_{i=1}^{n} i - \frac{n}{3}$$

Skript Bsp. 1.1.10.
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n\cdot(n+1)}{2} - \frac{n}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n(n+1) - 2n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

Aufgabe 1.4.

z.z.: $f_i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i$

Beweis per Induktion:

Sei $A(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$

IA: $A(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0}_{=1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}_{=1} = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 = f_0$ ✓

IV: Für $m \leq n$ gilt $f_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m$

IS: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \overset{IV}{=} A(n) + A(n-1)$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\overset{(i)}{=} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$$= A(n+1)$$ ✓

(i) Beachte: $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ sind die Lösungen der Gleichung $x^2 = x+1$, also gilt: $1 + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2$

□

Aufgabe 1.5.

Wir wollen die Aussage per Induktion zeigen:

IA: Für $k=2$ gilt (siehe Aufgabe 3):

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n(n+1) - 6}{6} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\frac{1}{k+1}} \underbrace{n^3}_{n^{k+1}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_2} \underbrace{n^2}_{n^2} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1} \underbrace{n}_{n^1} \underbrace{-1}_{a_0} \quad \checkmark$$

IV: Für alle $\tilde{k} \leq k$ gibt es für $\sum_{i=1}^{n} i^{\tilde{k}}$ eine Formel der angegebenen Gestalt.

IS: $\sum_{i=1}^{n} i^{k+2} - (i-1)^{k+2} = n^{k+2}$ (Beweis analog als für $k=2$ in der Aufgabe 1.3.)

$$n^{k+2} = \sum_{i=1}^{n} i^{k+2} - (i-1)^{k+2} = \sum_{i=1}^{n} i^{k+2} - \sum_{j=0}^{k+2} \binom{k+2}{j} i^j \cdot (-1)^{k+2-j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+2}{j} i^j (-1)^{k+2-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=1}^{n} \binom{k+2}{j} i^j (-1)^{k+2-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+2}{j} (-1)^{k+2-j} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^j$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k+2}{j} (-1)^{k+2-j} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^j + \binom{k+2}{k+1} (-1)^0 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^{k+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k+2}{j} (-1)^{k+2-j} \sum_{i=1}^{n} i^j + (k+2) \sum_{i=1}^{n} i^{k+1}$$

Daraus folgt: $\sum_{i=1}^{n} i^{k+1} = \frac{n^{k+2}}{k+2} - \sum_{j=0}^{k} \binom{k+2}{j} (-1)^{k+2-j} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^j$

$$\overset{IV}{=} \frac{n^{k+2}}{k+2} - \sum_{j=0}^{k} \binom{k+2}{j} (-1)^{k+2-j} \left(\frac{1}{j+1} n^{j+1} + a_j n^j + \dots + a_0 \right)$$

$$= \frac{n^{k+2}}{k+2} + b_{k+1} n^{k+1} + b_k n^k + \dots + b_1 n + b_0 \quad \checkmark$$