12.1 $f(t)=\sqrt{t^2-1}$. $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$. Wir wollen eine Stammfunktion von $f$.

Also wir wollen $\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt$ für $x>1$ bestimmen.

ERINNERUNG $\cosh(y)=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$, $\sinh y=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$

$\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$, $\sinh'=\cosh$, $\cosh'=\sinh$.

$\operatorname{arccosh}(y)=\log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$ für $y\geq 1$

Sei $t=\cosh(y)$. Dann $\sqrt{t^2-1}=\sqrt{\cosh^2 y-1}=\sinh y$.

Substitution.

$$\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt=\int_{\cosh^{-1}(1)=0}^{\operatorname{arccosh}(x)}\sqrt{\cosh^2 y-1}\,\sinh y\,dy=\int_0^{\operatorname{arccosh}(x)}\sinh^2 y\,dy=$$

$$=\int_0^{\operatorname{arccosh}(x)}\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{4}-\frac{1}{2}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arccosh} x}\cosh(2y)dy-\frac{1}{2}\operatorname{arccosh}(x)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sinh(2y)}{2}\right]_0^{\operatorname{arccosh} x}-\frac{1}{2}\operatorname{arccosh}(x)=\frac{1}{4}\sinh(2\operatorname{arccosh} x)-\frac{1}{2}\operatorname{arccosh} x \quad (*)$$

$$\sinh(2z)=\frac{e^{2z}-e^{-2z}}{2}=2\cdot\frac{e^z+e^{-z}}{2}\cdot\frac{e^z-e^{-z}}{2}=2\cosh(z)\sinh(z)$$

$$(*)=\frac{2}{4}\cosh(\operatorname{arccosh} x)\sinh(\operatorname{arccosh} x)-\frac{1}{2}\operatorname{arccosh} x=$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=:G(x)\qquad G:[1,\infty)\to\mathbb{R}.$$

$G$ ist eine Stammfunktion von $f$

12.2 Aus Aufgabe 8.2 haben wir

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

also

$$\int \sin^3 x = \frac{3}{4}\int \sin x - \frac{1}{4}\int \sin 3x =$$

$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\,\frac{\cos 3x}{3} = \underbrace{-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x}_{\text{Stammfunktion von } \sin^3}.$$

12.3

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| = R \in [0,\infty]$$

z.Z. $R$ ist der Konvergenzradius von $\sum a_\nu x^\nu$.

Das ist äquivalent zu zeigen, dass für jede $t<R$ $\sum a_\nu t^\nu$ konvergiert und, falls $R<\infty$, für jede $t>R$ $\sum a_\nu t^\nu$ konvergiert nicht.

Sei $t<R$. $\exists N, \varepsilon>0$ so dass $\forall n>N$ $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| > t+\varepsilon \Leftrightarrow |a_{n+1}| < \frac{|a_n|}{t+\varepsilon}$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu t^\nu| = \sum_{\nu=0}^{N-1}|a_\nu t^\nu| + \sum_{\nu=N}^{\infty}|a_\nu t^\nu| \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{N-1}|a_\nu t^\nu| + \sum_{\nu=N}^{\infty}\left|\frac{a_N\cdot t^\nu}{(t+\varepsilon)^{\nu-N}}\right|$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N-1}|a_\nu t^\nu| + \left|\frac{a_N}{(t+\varepsilon)^N}\right| \underbrace{\sum_{\nu=N}^{\infty}\left|\frac{t}{t+\varepsilon}\right|^\nu}_{\substack{\text{konvergiert}\\ \text{(Geometrische Reihe)}}} < \infty$$

$\Rightarrow \sum a_\nu t^\nu$ absolut konvergiert $\Rightarrow \sum a_\nu t^\nu$ konv.

Sei jetzt $t>R$. Falls $\sum a_\nu t^\nu$ konvergiert, dann $\sum a_\nu u^\nu$ konvergiert für jede $R<u<t$.

Also ist genug z.Z. dass, $\sum|a_\nu u^\nu|$ nicht konvergiert.

$\exists N$ so dass $\forall n > N$ $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < u \iff |a_{n+1}| > \frac{|a_n|}{u}$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu u^\nu| = \sum_{\nu=0}^{N-1} |a_\nu u^\nu| + \sum_{\nu=N}^{\infty} |a_\nu u^\nu|$$
$$\geq \sum_{\nu=0}^{N-1} |a_\nu u^\nu| + \sum_{\nu=N}^{\infty} \left| \frac{a_N \cdot u^\nu}{u^{\nu-N}} \right|$$
$$= \sum_{\nu=0}^{N-1} |a_\nu t^\nu| + \left|\frac{a_N}{u^N}\right| \sum_{\nu=N}^{\infty} 1 = \infty$$

<u>12.4</u> $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergiert zu $\frac{1}{1-x}$

Wäre die Konvergenz gleichmäßig, dann $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0$ so dass
$$\left|\sum_{k=N}^{\infty} x^k\right| < \varepsilon \quad \text{für jede } x \in (-1,1).$$
Aber $\sum_{k=N}^{\infty} x^k = x^N \frac{1}{1-x}$ und für $x = 1-\delta$ mit $\delta < \frac{1}{N+\varepsilon}$

wir haben $$\frac{(1-\delta)^N}{\delta} \overset{\text{BERNOULLI ÜBUNG 3.2}}{\geq} \frac{1-N\delta}{\delta} > \varepsilon$$

weil $\frac{1-N\delta}{\delta} > \varepsilon \iff 1 - N\delta > \varepsilon\delta \iff 1 > (N+\varepsilon)\delta \iff \delta < \frac{1}{N+\varepsilon}$.

Wir bekommen einen Widerspruch $\lightning$, also existiert N nicht.

12.5 $t(x) := \sum_{k=0}^{\infty} k x^k$. $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$. Nach 12.3 ist 1 der Konvergenzradius.

Sei $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Der Konvergenzradius von $s$ ist 1.

und auf $(-1,1)$ wir haben $s(x) = \frac{1}{1-x}$.

Nach Satz 6.1h die Ableitung von $s$ ist

$$s'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1}.$$

Es folgt, dass $t(x) = x s'(x) = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$