Blatt 13 Musterlösung
Analysis 1 WS 2022/23

Aufgabe 1

Taylorentwicklung von $f(x) = \sqrt{2+x}$ um $x = 0$ mit Restglied $\varepsilon(x)$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \varepsilon(x) \cdot x^3$$

Wir berechnen die Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2+x)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{1}{2}} \\ f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{4}(2+x)^{-\frac{3}{2}} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}(2+x)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}}{1}x + \frac{-\frac{1}{4} \cdot 2^{-\frac{3}{2}}}{2}x^2 + \frac{\frac{3}{8} \cdot 2^{-\frac{5}{2}}}{6}x^3 + \varepsilon(x) \cdot x^3$$

Die Koeffizienten sind also: $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{16\sqrt{2}}$, $\frac{1}{64\sqrt{2}}$

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar und sei $p \in U$ wobei $n \in \mathbb{N}$ mit minimal mit $f^{n+1}(p) \neq 0$
Taylorentwicklung von f um p mit Restglied $\varepsilon(h)$:

$$\begin{aligned}
&f(p+h) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(p)}{i!} h^i + \left(\frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!} + \varepsilon(h) \right) \cdot h^{n+1} && \text{Taylorentwicklung} \\
&= f(p) + \left(\frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!} + \varepsilon(h) \right) \cdot h^{n+1} && \text{Da per Annahme für } 0 < i \leq n \text{ gilt } f^{(i)}(p) = 0
\end{aligned}$$

Wir wissen über das Restglied, dass $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
Es existiert also ein $\delta > 0$, sodass $\forall |h| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!} + \varepsilon(h) > 0 && \text{Wenn } f^{(n+1)}(p) > 0 \\
&\frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!} + \varepsilon(h) < 0 && \text{Wenn } f^{(n+1)}(p) < 0
\end{aligned}$$

Fall n ungerade

Wenn n ungerade ist und $h \neq 0$, so gilt $h^{n+1} > 0$
Wenn $f^{(n+1)}(p) > 0$ erhalten wir also $\forall 0 < |h| < \delta$

$$f(p+h) = f(p) + \left(\frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!} + \varepsilon(h) \right) h^{n+1} > f(p)$$

Also hat f ein isoliertes lokales Minimum in p.

Analog für $f^{(n+1)}(p) < 0$ gilt $\forall 0 < |h| < \delta$, dass $f(p+h) < f(p)$
Also hat f ein isoliertes lokales Maximum in p.

Fall n gerade

Wenn n gerade ist so gilt für alle h: $h^{n+1} > 0 \Leftrightarrow h > 0$
Wenn $f^{(n+1)}(p) > 0$ erhalten wir also $\forall 0 < h < \delta$

$$f(p+h) = f(p) + \left(\frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!} + \varepsilon(h) \right) h^{n+1} > f(p) > f(p) + \left(\frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!} + \varepsilon(-h) \right) (-h)^{n+1} = f(p-h)$$

Wenn $f^{(n+1)}(p) < 0$ so sind die Ungleichungen umgedreht.
Insgesamt hat f also weder ein isoliertes lokales Maximum noch ein isoliertes lokales Minimum bei p.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit I offen und f' bei $x \in I$ differenzierbar.
Taylorentwicklung von f um x mit Restglied $\varepsilon(h)$:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + f''(x)\frac{h^2}{2} + \varepsilon(h)h^2$$

Also:

$$f(x-h) = f(x) - f'(x) \cdot h + f''(x)\frac{h^2}{2} + \varepsilon(-h)h^2$$

Insgesamt erhalten wir

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \frac{2f(x) + f''(x) \cdot h^2 + h^2(\varepsilon(h) + \varepsilon(-h)) - 2f(x)}{h^2} = f''(x) + \varepsilon(h) + \varepsilon(-h)$$

Also

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \lim_{h \to 0} (f''(x) + \varepsilon(h) + \varepsilon(-h)) = f''(x)$$

Was zu beweisen war.

Aufgabe 4

Sei $f(x) = e^x \sin(x)$ und $g(x) = e^x \cos(x)$
Dann gilt

$$f'(x) = e^x \cos x + e^x \sin x = g(x) + f(x)$$
$$g'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = g(x) - f(x)$$

Also

$$f'' = f' + g' = f + g + g - f = 2g$$
$$g'' = g' - f' = g - f - f - g = -2f$$

Insgesamt:

$$f^{(4)} = 2g'' = -4f$$
$$f^{(8)}(x) = -4f^{(4)}(x) = 16f(x) = 16 \cdot e^x \sin(x)$$

Also $f^{(8)}(0) = 0$