Übungen Analysis 1

Abgabe bis Mittwoch, den 2.11 um 8:15

Übung 2.1. Beweisen Sie die de Morgan'sche Regel

$$X\backslash(Y \cup Z) = (X\backslash Y) \cap (X\backslash Z)$$

Übung 2.2. Sei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ die Abbildung $f : x \mapsto (1 + x^2)$. Man beschreibe die Abbildungen $f \circ f$ und $f \circ f \circ f$ ebenfalls durch polynomiale Ausdrücke.

Übung 2.3. Man zeige für jedes invertierbare Element $a \in M$ eines Monoids $(M, \top)$ und alle $m, n \in \mathbb{Z}$ die Iterationsregeln $(n + m)^{\top} a = (n^{\top} a)\top(m^{\top} a)$.

Übung 2.4. Ist K ein Körper derart, daß es kein $x \in K$ gibt mit $x^2 = -1$, so kann man die Menge $K \times K = K^2$ zu einem Körper machen, indem man die Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{array}{rcc} (a, b) + (c, d) & := & (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) & := & (ac - bd, ad + bc) \end{array}$$

Die Abbildung $K \to K^2$, $a \mapsto (a, 0)$ ist dann ein Körperhomomorphismus. Kürzen wir $(a, 0)$ mit a ab und setzen $(0, 1) = \mathrm{i}$, so gilt $\mathrm{i}^2 = -1$ und $(a, b) = a + b\,\mathrm{i}$ und die Abbildung $a + b\,\mathrm{i} \mapsto a - b\,\mathrm{i}$ ist ein Körperhomomorphismus $K^2 \stackrel{\sim}{\to} K^2$.

Analysis 1 – Übungsblatt 2

Übung 2.1

ZZ: $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$

Bw:

1) $X \setminus (Y \cup Z) \subset (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$:

Sei $x \in X \setminus (Y \cup Z)$: $\Rightarrow x \in X$, aber $x \notin Y$, $x \notin Z$

$\Rightarrow x \in X \setminus Y$ und $x \in X \setminus Z \Rightarrow x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$

2) $(X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \subset X \setminus (Y \cup Z)$:

Sei $x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \Rightarrow x \in (X \setminus Y)$ und $x \in (X \setminus Z)$

$\Rightarrow x \in X$, aber $x \notin Y$ und $x \notin Z \Rightarrow x \notin Y \cup Z$

Also gilt $x \in X \setminus (Y \cup Z)$

Übung 2.2

Sei $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longmapsto (1+x^2)$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(1+x^2) = 1 + (1+x^2)^2 = 2 + 2x^2 + x^4$$

$$f \circ f \circ f(x) = f(f \circ f(x)) = 1 + (1 + (1+x^2)^2)^2$$

$$= 1 + 1 + 2(1+x^2)^2 + (1+x^2)^4$$

$$= 2 + 2(1 + 2x^2 + x^4) + 1 + 4x^2 + 6x^4 + 4x^6 + x^8$$

$$= 5 + 8x^2 + 8x^4 + 4x^6 + x^8$$

Übung 2.3

ZZ: Für alle invertierbaren Elemente a eines Monoids $(M,\top)$ und $\forall n,m \in \mathbb{Z}$ gilt $(n+m)^\top a = (n^\top a)\top(m^\top a)$

$$n^\top a := \begin{cases} \underbrace{a\top a\top\cdots\top a}_{n\text{-mal}} & n>0 \\ id & n=0 \\ \underbrace{(-n)^\top \bar{a}}_{\text{falls } a \text{ invertierbar}} & n<0 \end{cases}$$, wobei $\bar{a}$ das Inverse von a ist

Bew: 1. Fall: $n,m \geq 0$

$$(n+m)^\top a = \underbrace{a\top a\top\cdots\top a}_{(n+m)\text{-mal}} = \underbrace{a\top\cdots a}_{n\text{-mal}}\top \underbrace{a\top\cdots a}_{m\text{-mal}} = (n^\top a)\top(m^\top a)$$

2. Fall: $n,m<0$

$$(n+m)^\top a = (-n-m)^\top \bar{a}$$

Da $-n,-m \geq 0$, folgt aus dem 1. Fall:

$$(-n-m)^\top \bar{a} = (-n^\top \bar{a})\top(-m^\top \bar{a}) = (n^\top a)\top(m\top a)$$

3. Fall: $n+m \geq 0$, aber $n \leq 0$

$$(n+m)^\top a = \underbrace{a\top a\top\cdots\top a}_{(n+m)\text{-mal}} = \overbrace{\underbrace{\bar{a}\top\bar{a}\top\cdots\bar{a}}_{(-n)\text{-mal}}\top\underbrace{a\top a\cdots\top a}_{(-n)\text{-mal}}}^{=1}\top\underbrace{a\cdots\top a}_{(n+m)\text{-mal}}$$

$$=((-n)^\top\bar{a})\top(m^\top a) = (n^\top a)\top(m^\top a)$$ $\rightarrow m<0$ geht analog

4. Fall: $n+m \leq 0$ aber $n \geq 0$

$$(n+m)^\top a = (-n-m)^\top \bar{a}$$

Da $(-n-m) \geq 0$ und $-n \leq 0$, folgt aus dem 3. Fall:

$$(-n-m)^\top \bar{a} = (-n)^\top \bar{a}\top(-m)^\top \bar{a} = (n^\top a)\top(m^\top a)$$

$\Rightarrow m \geq 0$ geht wieder analog

$\square$

Übung 2.4:

Sei K ein Körper, sodass $\forall x \in K$ gilt: $x^2 \neq -1$

ZZ: $K \times K = K^2$ ist ein Körper, zusammen mit:

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Bew: Es muss gelten:

1) $(K,+)$ ist eine abelsche Gruppe

2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe

3) das Distributivgesetz gilt

Seien $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in K$:

1)

- „+" ist wohldefiniert:

$$(a_1,a_2) + (b_1,b_2) = (\underbrace{a_1+b_1}_{\in K}, \underbrace{a_2+b_2}_{\in K}) \in K^2$$

- „+" ist eine assoziative Verknüpfung:

$$(a_1,a_2) + \big((b_1,b_2) + (c_1,c_2)\big) = (a_1,a_2) + (b_1+c_1, b_2+c_2)$$

$$= (a_1+b_1+c_1, a_2+b_2+c_2) \overset{\text{die Addition in } K \text{ ist assoziativ}}{=} (a_1+b_1, a_2+b_2) + (c_1,c_2) = \big((a_1,a_2) + (b_1,b_2)\big) + (c_1,c_2)$$

- „+" ist kommutativ:

$$(a_1,a_2) + (b_1,b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2) = (b_1+a_1, b_2+a_2) = (b_1,b_2) + (a_1,a_2)$$

- es gibt ein neutrales Element:

$$(a_1,a_2) + (0,0) = (a_1+0, a_2+0) = (a_1,a_2)$$ $\Rightarrow (0,0)$ ist neutrales Element

- es gibt Inverse:

$$(a_1,a_2) + (-a_1,-a_2) = (a_1-a_1, a_2-a_2) = (0,0)$$

$\Rightarrow (-a_1,-a_2)$ ist inverses Element von (a_1,a_2) $\forall a_1,a_2 \in K$

2) Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2) \in K^2/\{(0,0)\}$

- „·" ist wohldefiniert, also $(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2) \in K^2/\{0_{K^2}\}$

$$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2) = (a_1b_1-a_2b_2,\ a_1b_2+a_2b_1)$$

Angenommen es gilt $a_1b_1-a_2b_2=0=a_1b_2+a_2b_1$

Da $(a_1,a_2),(b_1,b_2) \in K^2/\{0_{K^2}\}$, muss entweder a_1 oder a_2 ungleich 0 sein, und b_1 oder b_2 ungleich 0 sein.

$\Rightarrow$ OBdA $a_1 \neq 0$ und $b_2 \neq 0$

Angenommen $a_2=0 \Rightarrow (a_1b_1,\underbrace{a_1b_2}_{\neq 0}) \neq (0,0)$, also kann auch angenommen werden, dass $a_2 \neq 0$

$\Rightarrow a_1,a_2,b_2$ haben Inverse, also gilt:

$$a_1b_1-a_2b_2=0 \iff a_1b_1=a_2b_2 \iff b_1\cdot b_2^{-1}=a_2a_1^{-1}$$

$$a_1b_2+a_2b_1=0 \iff a_2b_1=-a_1b_2 \iff b_2^{-1}b_1=-a_1a_2^{-1}$$

$$\Rightarrow a_2a_1^{-1}=-a_1a_2^{-1}=-(a_2a_1^{-1})^{-1} \Rightarrow (a_2a_1^{-1})^2=-1 \quad \lightning$$

Das ist ein Widerspruch, da $x^2 \neq -1\ \forall x \in K$

$\Rightarrow$ „·" ist wohldefiniert

- „·" ist assoziativ:

$$(a_1,a_2)\cdot((b_1,b_2)\cdot(c_1,c_2)) = (a_1,a_2)\cdot(b_1c_1-b_2c_2,\ b_1c_2+b_2c_1)$$

$$=(a_1(b_1c_1-b_2c_2)-a_2(b_1c_2+b_2c_1),\ a_1(b_1c_2+b_2c_1)+a_2(b_1c_1-b_2c_2))$$

$$=((a_1b_1-a_2b_2)c_1-(a_1b_2+a_2b_1)c_2,\ (a_1b_2+a_2b_1)c_1+(a_1b_1+a_2b_2)c_2)$$

$$=(a_1b_1-a_2b_2,\ a_1b_2+a_2b_1)(c_1,c_2) = ((a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2))\cdot(c_1,c_2)$$

- „·" ist kommutativ:

$$(a_1,a_2)(b_1,b_2)=(a_1b_1-a_2b_2,\ a_1b_2+a_2b_1)=(b_1a_1-b_2a_2,\ b_1a_2+b_2a_1)$$

$$=(b_1,b_2)(a_1,a_2)$$

- es gibt ein neutrales Element:

$$(a_1,a_2)\cdot(1,0)=(a_1,a_2) \quad \Rightarrow (1,0) \text{ ist neutrales Element}$$

- Inverse:

$$(a_1,a_2)\cdot(a_1,-a_2)=(a_1^2-a_2^2,-a_1a_2+a_2a_1)=(a_1^2-a_2^2,0)$$

OBdA $a_1\neq 0$, dann gilt:

$$a_1^2-a_2^2=0 \Leftrightarrow a_1^2=-a_2^2 \Leftrightarrow a_1^2a_2^{-2}=-1 \Leftrightarrow (a_1a_2^{-2})^2=-1 \quad ↯$$

$\rightarrow$ also ist $a_1^2-a_2^2\neq 0$ und $\left(\frac{a_1}{a_1^2-a_2^2},-\frac{a_2}{a_1^2-a_2^2}\right)=(a_1,a_2)^{-1}$

3) $(a_1,a_2)\cdot((b_1,b_2)+(c_1,c_2))=(a_1,a_2)\cdot(b_1+c_1,b_2+c_2)$

$=(a_1(b_1+c_1)-a_2(b_2+c_2),a_1(b_2+c_2)+a_2(b_1+c_1))$

$=(a_1b_1-a_2b_2+a_1c_1-a_2c_2,a_1b_2+a_2b_1+a_1c_2+a_2c_1)$

$=(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)+(a_1c_1-a_2c_2,a_1c_2+a_2c_1)$

$=(a_1,a_2)(b_1,b_2)+(a_1,a_2)(c_1,c_2)$ $\square$

ZZ: $\varphi: K\rightarrow K^2, a\mapsto(a,0)$ ist ein Körperhomomorphismus

Bew:

Es muss gelten:

1) $f(0_K)=0_{K^2}$, $f(1_K)=1_{K^2}$

2) $\forall a,b\in K$: $f(a+b)=f(a)+f(b)$

3) $\forall a,b\in K$: $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$

1) $f(0)=(0,0)=0_{K^2}$, $f(1)=(1,0)=1_{K^2}$

2) $f(a+b)=(a+b,0)=(a,0)+(b,0)=f(a)+f(b)$

3) $f(a\cdot b)=(ab,0)=(a,0)\cdot(b,0)=f(a)\cdot f(b)$ $\square$

Sei $a := (a,0)$, also $a \in K^2$ und $i := (0,1)$

zz: $i^2 = -1$ und $(a,b) = a+bi$

Bew:

$$(0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0)$$

$$\Rightarrow i^2 = -1$$

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = \underbrace{(a,0)}_{=a} + b\cdot\underbrace{(0,1)}_{=i}$$

$$\Rightarrow (a,b) = a+bi$$

$\square$

zz: $\varphi: K^2 \to K^2$, $a+bi \mapsto a-bi$ ist ein Körperisomorphismus

Bew:

- $\varphi(0) = \varphi(0+0\cdot i) = 0-0\cdot i = 0$
- $\varphi(1) = \varphi(1+0\cdot i) = 1-0\cdot i = 1$

Seien $a_1, b_1, a_2, b_2 \in K$:

- $\varphi((a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)) = \varphi(a_1+a_2+(b_1+b_2)i) = a_1+a_2-(b_1+b_2)i$
  $= a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i = \varphi(a_1+b_1 i) + \varphi(a_2+b_2 i)$

$\Rightarrow \varphi$ ist ein Körperhomomorphismus

Es bleibt zu zeigen, dass φ bijektiv ist:

$\varphi^2(a+bi) = \varphi(a-bi) = a+bi \qquad \Rightarrow \varphi^{-1} = \varphi \quad \Rightarrow \varphi$ ist bijektiv

$\square$