Analysis I Blatt 3

3.1. Sei K ein angeordneter Körper

1. z.z.: $|x-a| \leq \eta$ und $|y-b| \leq \eta \Rightarrow |(x+y)-(a+b)| \leq 2\eta$

Beweis:

Sei nun $|x-a| \leq \eta$ und $|y-b| \leq \eta$

$$|(x+y)-(a+b)| = |(x-a)+(y-b)| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|x-a|}_{\leq \eta} + \underbrace{|y-b|}_{\leq \eta}$$

$$\leq 2\eta$$

$\square$

2. z.z.: $|x-a| \leq \eta \leq 1$ und $|y-b| \leq \eta \leq 1 \Rightarrow |xy-ab| \leq \eta(|b|+1+|a|)$

Beweis:

Sei $|x-a| \leq \eta \leq 1$ und $|y-b| \leq \eta \leq 1$

$$|xy-ab| = |xy \underbrace{-xb+xb}_{=0} -ab| = |x(y-b)+b(x-a)|$$

$$\underset{\substack{\Delta\text{-Ungl.}\\ +\text{ Homogenität}}}{\leq} |x|\underbrace{|y-b|}_{\leq \eta} + |b|\underbrace{|x-a|}_{\leq \eta} \leq (|x|+|b|)\eta = (|x \underbrace{-a+a}_{=0}| + |b|)\eta$$

$$\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} (\underbrace{|x-a|}_{\leq 1} + |a| + |b|)\eta \leq (|a|+1+|b|)\eta$$

$\blacksquare$

3. z.z.: $|y-b| \leq \eta \leq |b|/2$ und $b \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$ u. $|1/y - 1/b| \leq 2\eta/|b|^2$

Sei $|y-b| \leq \eta \leq |b|/2$ und $b \neq 0$

Angenommen $y = 0$:

$$\Rightarrow |y-b| = |-b| = |b| \cdot 1 \geq |b| \cdot \frac{1}{2} = |b|/2 \quad ↯$$

$|b| \geq 0$ und $1 \geq \frac{1}{2}$

Lemma 2.3.3 (2.)

$\Rightarrow y \neq 0$

$$\left|1/y - 1/b\right| = \left|\frac{b-y}{yb}\right| \underset{\text{Homogenität}}{=} \frac{\overbrace{|b-y|}^{=|y-b| \leq \eta}}{|y||b|} \leq \frac{\eta}{|y||b|} \overset{(*)}{\leq} \frac{2\eta}{|b|^2}$$

(*) Gilt weil:

$$|b| = |b \underbrace{-y+y}_{=0}| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |b-y| + |y|$$

$$\Rightarrow |y| \geq |b| - \underbrace{|b-y|}_{=|y-b| \leq |b|/2} \geq |b| - |b|/2 \geq |b|/2$$

$\square$

3.2 Sei K ein angeordneter Körper. Sei $x \in K$ mit $x \geq -1$. Sei $n \in \mathbb{N}$

z: $(1+x)^n \geq 1+nx$

<u>Beweis per Induktion über n.</u>

IB: $n=0$

$(1+x)^0 = 1 = 1+0\cdot x$ ✓

IA: $(1+x)^n \geq 1+nx$ für ein $n \in \mathbb{N}$

IS:

z: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

<u>Beweis:</u>

Nach IA gilt:

$(1+x)^n \geq 1+nx$. ~~[illegible]~~

Nach den Vorraussetzungen gilt: $x \geq -1 \overset{\text{Def 2.3.1 (1.)}}{\Rightarrow} x+1 \geq 1-1=0$

$\overset{\text{Lemma 2.3.3 (2.)}}{\Rightarrow} (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)\cdot(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2$

$\Leftrightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}$

$\left(\begin{array}{c}\text{Aus Def. 2.3.1 (2.) und} \\ \text{Lemma 2.3.3 (6.) folgt} \\ nx^2 \geq 0\end{array}\right) \Rightarrow -nx^2 \leq 0$ (folgt aus Lemma 2.3.3 (4.))

$\overset{\text{Lemma 2.3.3 (1.) und } -nx^2 \leq 0}{\Rightarrow} (1+x)^{n+1}+0 \geq 1+(n+1)x+nx^2-nx^2 = 1+(n+1)x$

$\square$

3.3 Sei K ein angeordneter Körper $I \subset K$ ein Intervall.
Sei $\phi : I \to K$ konvex
Seien $x_1, \dots, x_n \in I$, $\mu_1, \dots, \mu_n \in K_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$

Z: $$\phi\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i \phi(x_i)$$

Beweis per Induktion über n:

IB: $n = 1$: $\Rightarrow \mu_1 = 1$

$\phi(x_1) \leq \phi(x_1)$ ✓

$n = 2$: $\mu := \mu_1 \Rightarrow \mu_2 = 1 - \mu$

O.B.d.A. $x_1 \leq x_2$

$z := \mu x_1 + (1-\mu) x_2 \Rightarrow x_1 \leq z \leq x_2$

falls $z = x_1$

$\Rightarrow x_1 = \mu x_1 + (1-\mu) x_2$

$\Leftrightarrow (1-\mu) x_1 = (1-\mu) x_2 \Rightarrow \mu = 1$ oder $x_1 = x_2$

Falls $\mu = 1 \Rightarrow \phi(x_1) \leq \phi(x_1)$ ✓

Falls $x_1 = x_2 \Rightarrow \phi(z) = \phi(\mu x_1 + (1-\mu) x_1) = \phi(x_1)$

$= \phi(x_1) \mu + (1-\mu) \phi(x_2)$ ✓

falls $z = x_2$

$\Rightarrow x_2 = \mu x_1 + (1-\mu) x_2$

$\Leftrightarrow \mu x_2 = \mu x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$ oder $\mu = 0$

Falls $\mu = 0$: $(\mu_1 = 0 \ \mu_2 = 1)$

$\Rightarrow \phi\left(\sum_{i=1}^2 \mu_i x_i\right) = \phi(x_2) = \sum_{i=1}^2 \mu_i \phi(x_i)$ ✓

Falls $x_1 = x_2 \Rightarrow \phi(\mu x_1 + (1-\mu) x_1) = \phi(x_1) = \phi(x_1)\mu + (1-\mu)\phi(x_2)$ ✓

Sei nun $x_1 < z < x_2 \Rightarrow 0 < \mu < 1$

ϕ ist konvex

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\phi(x_1)-\phi(z)}{x_1 - z}}_{\underbrace{(1-\mu)}_{>0}\underbrace{(x_1-x_2)}_{<0}} \leq \underbrace{\frac{\phi(z)-\phi(x_2)}{z-x_2}}_{\underbrace{\mu}_{>0}\underbrace{(x_1-x_2)}_{<0}}$$

$$\Leftrightarrow (\phi(x_1)-\phi(z))\cdot\mu \geq (\phi(z)-\phi(x_2))\cdot(1-\mu)$$

Lemma 2.3.3.(5.)

$$\Leftrightarrow \phi(x_1)\mu - \phi(z)\mu \geq \phi(z)\cdot(1-\mu) - \phi(x_2)\cdot(1-\mu)$$

$$\Leftrightarrow \phi(z) \leq \mu\phi(x_1) + (1-\mu)\cdot\phi(x_2) \quad ✓$$

IA: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\phi\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \phi(x_i)$

IS: z.z.: $\phi\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \phi(x_i)$

<u>Beweis:</u>

$\tilde{\mu}_n := \mu_n + \mu_{n+1}$, $\tilde{x}_n := \frac{\mu_n}{\mu_n+\mu_{n+1}} x_n + \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n+\mu_{n+1}} x_{n+1}$

$\Rightarrow \tilde{\mu}_n \tilde{x}_n = \mu_n x_n + \mu_{n+1} x_{n+1}$

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i x_i\right) = \phi\left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i\right) + \tilde{\mu}_n \tilde{x}_n\right)$$

$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i\right) + \tilde{\mu}_n = 1$ und $x_n \leq \tilde{x}_n \leq x_{n+1} \Rightarrow \tilde{x}_n \in I$

$$\underset{IA}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \phi(x_i)\right) + \tilde{\mu}_n \phi(\tilde{x}_n)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \phi(x_i)\right) + \tilde{\mu}_n \phi\left(\frac{\mu_n}{\mu_n+\mu_{n+1}} x_n + \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n+\mu_{n+1}} x_{n+1}\right)$$

$x_n, x_{n+1} \in I$ $\quad \frac{\mu_n}{\mu_n+\mu_{n+1}} + \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n+\mu_{n+1}} = 1$

$$\underset{IB(n=2)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \phi(x_i)\right) + \mu_n \phi(x_n) + \mu_{n+1}\phi(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \phi(x_i) \quad \square$$

3.4 z: $A := \{x \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \mid x^2 \geq 2\}$ besitzt in $\mathbb{Q}$ keine größte untere Schranke

<u>Beweis:</u>

Sei $y \in \mathbb{Q}$ eine untere Schranke von A.

<u>Behauptung:</u> $\exists \check{y} \in \mathbb{Q}$ untere Schranke mit $\check{y} > y$

<u>Beweis:</u>

Falls $y < 0 \Rightarrow 0$ ist eine größere untere Schranke

Sei nun $y \geq 0$

<u>2. Behauptung:</u>

$y^2 < 2$

<u>Beweis:</u>

Aus der Vorlesung wissen wir, dass es kein $x \in \mathbb{Q}$ gibt mit $x^2 = 2$.

<u>Angenommen:</u> $y^2 > 2$.

$(y - \frac{1}{n})^2 = y^2 - \frac{2y}{n} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{>0} \geq y^2 - \frac{2y}{n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

$y^2 - \frac{2y}{n} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{y^2-2}{2y} \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \geq \frac{2y}{y^2-2}$

Für $n \geq \frac{2y}{y^2-2}$ ist $(y - \frac{1}{n}) \in A$ und $y - \frac{1}{n} < y \Rightarrow y$ ist keine untere ~~Untere~~ Schranke $\lightning$

$\Rightarrow y^2 < 2$ $\square$ 2. Beh.

3. Behauptung: für $n > \frac{y + \sqrt{2}}{a}$ wobei $a := 2 - y^2$

ist $y + \frac{1}{n}$ eine größe untere Schranke

Beweis:

$y + \frac{1}{n} > y$ ✓

$$\left(y + \frac{1}{n}\right)^2 < \left(y + \frac{a}{y+\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{y^2 + y\sqrt{2} + a}{y + \sqrt{2}}\right)^2$$

$$\underset{2 = y^2 + a}{=} \left(\frac{2 + y\sqrt{2}}{y + \sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4 + 4y\sqrt{2} + 2y^2}{y^2 + 2y\sqrt{2} + 2} = 2$$

Somit ist $y + \frac{1}{n}$ eine größe untere Schranke

□ 3 Beh.

Da $y \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq y < 2$ frei gewählt wurde

gibt es immer eine größe untere Schranke

□ Beh.

□