Übungen Analysis 1

Abgabe bis Dienstag, den 15.11 um 8:15

Übung 4.1. Sei X eine teilgeordnete Menge. Man zeige: Besitzt eine Teilmenge $Y \subset X$ ein größtes Element $g \in Y$, so gilt $g = \sup Y$. Man zeige: Sind Teilmengen $Z \subset Y \subset X$ gegeben und besitzen Z und Y ein Supremum in X, so gilt $\sup Z \leq \sup Y$.

Beweis:

- Sei $g \in Y \subset X$ größtes Element, also $g \geq y \ \forall y \in Y$

  $\Rightarrow g$ ist obere Schranke von Y in X

  Sei $\tilde{g} := \sup Y$, also kleinstes Element in $M := \{\sigma \in X \mid \sigma$ obere Schranke von Y in $X\}$

  Es gilt: $g, \tilde{g} \in M$

  $\Rightarrow \tilde{g} \leq g$, da $\tilde{g}$ kleinstes Element in M.

  Weiter ist $\tilde{g}$ obere Schranke von Y in X

  $\Rightarrow \tilde{g} \geq y \ \forall y \in Y$ insbesondere $\tilde{g} \geq g$

  Insgesamt: $g = \tilde{g} = \sup Y$

- $g := \sup Z$, $h := \sup Y$

  $\Rightarrow h \geq y \ \forall y \in Y$ insbesondere $h \geq z \ \forall z \in Z$, da $Z \subset Y$.

  $\Rightarrow h \in \{\sigma \in X \mid \sigma$ obere Schranke von Z in $X\}$

  Wegen $g = \sup Z$ erhalten wir:

  $$\sup Z = g \leq h = \sup Y$$

Übung 4.2. Seien X und Y nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Mit der Notation $X + Y \subset \mathbb{R}$ für die Menge $\{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ zeige man $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$.

<u>Beweis:</u>

Es gilt:

$$x + y \leq \sup X + y \leq \sup X + \sup Y \quad \forall (x+y) \in (X+Y)$$

$\Rightarrow$ $\sup X + \sup Y$ ist obere Schranke von $X+Y$

Es bleibt noch <u>zz</u>: $\sup X + \sup Y$ ist kleinste obere Schranke von $X+Y$.

Sei $z \in \mathbb{R}$ mit $z < \sup X + \sup Y$

Dann existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \sup X$, $\beta < \sup Y$ und $z < \alpha + \beta$

Weiter existieren $x' \in X$ und $y' \in Y$ mit $x' \geq \alpha$ und $y' \geq \beta$

Wegen

$$z < \alpha + \beta \leq x' + y' \in X + Y$$

ist z keine obere Schranke von $X+Y$.

$\Rightarrow$ $\sup X + \sup Y$ ist die kleinste obere Schranke von $X+Y$

Also gilt $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$

Übung 4.3. Man zeige: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{Q}$ ist nur an der Stelle $p = 0$ stetig.

① <u>zeige:</u> f ist stetig an der Stelle $p=0$

Sei $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$ mit $a<0<b$

Behaupte: $f(I)\subset I$

↳ Beweis der Behauptung:

Sei $f(x)\in f(I)$ beliebig.

$\Rightarrow (x\in I,$ also $a<x<b)$ und $(f(x)=0$ oder $f(x)\in\mathbb{Q})$

Ist $f(x)\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ gilt $a<x=f(x)=x<b$

$\Rightarrow f(x)\in I$

Ist $f(x)=0$, dann ist $f(x)\in I$ klar.

Somit haben wir für jede Umgebung I von $f(0)=0$ eine Umgebung $I'=I$ von 0 gefunden, so dass

$$f(I)\subset I$$

$\Rightarrow f$ ist an der Stelle 0 stetig

② <u>zeige:</u> f nicht stetig an Stelle p $\forall p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Sei also $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

<u>Fall 1:</u> $p\in\mathbb{Q}$. $\Rightarrow f(p)=p$

$I:=\left(\frac{1}{2}p,\frac{3}{2}p\right)$ ist eine Umgebung von $f(p)=p$ und es gilt $0\notin I$.

Ist U eine beliebige Umgebung von p, dann existiert $I'=(a,b)\subset U$ mit $a<p<b$. und $a,b\in\mathbb{Q}$

Es gilt $c:=a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}b\in(a,b)\setminus\mathbb{Q}$

$\Rightarrow f(c)=0\notin I$

$\Rightarrow \nexists$ Umgebung U von p so dass $f(U\cap\mathbb{R})=f(U)\subset I$

$\Rightarrow f$ ist nicht stetig in p.

Fall 2: $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\Rightarrow f(p) = 0$

$I = (-\frac{1}{2}|p|, \frac{1}{2}|p|)$ ist eine Umgebung von $f(p) = 0$.

Sei U eine Umgebung von p.

Dann existiert $I' = (a,b) \subset U$ mit $a < p < b$.

Fall 2.1: $p > 0$

Mit der 4. Aussage aus Korollar 2.4.9 wissen wir

$\exists x \in \mathbb{Q}$ mit $p < x < b$, also $x \in I'$

$\Rightarrow f(x) = x > p$

$\Rightarrow f(x) \notin I$

$\Rightarrow \nexists$ Umgebung U von p mit $f(U) \subset I$

Fall 2.2: $p < 0$

Mit der 4. Aussage aus Korollar 2.4.9 wissen wir

$\exists x \in \mathbb{Q}$ mit $a < x < p$, also $x \in I'$

$\Rightarrow f(x) = x < p$

$\Rightarrow f(x) \notin I$

$\Rightarrow \nexists$ Umgebung U von p mit $f(U) \subset I$

Insgesamt erhalten wir:

f ist nicht stetig für $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Übung 4.4. Man zeige: Gegeben $f, g, h : \bar{\mathbb{R}}^n \supset D \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall x \in D$ und f, h stetig bei $p \in D$ mit $f(p) = h(p)$ ist auch g stetig bei p.

zz g ist stetig bei p

Beweis:

Wegen $f(p) \leq g(p) \leq h(p)$ und $f(p) = h(p)$ gilt:

$$g(p) = f(p) = h(p)$$

Sei V eine Umgebung von $f(p)$. Betrachte ein Intervall $I \subset U$ mit $g(p) \in I$.

Da f, g stetig existieren Umgebungen U, U' von p mit

$f(U) \subset I$ und $h(U') \subset I$

$U'' = U \cap U'$ ist wieder eine Umgebung von p und wegen $U'' \subset U$, $U'' \subset U'$

gilt:

$$f(U'') \subset I \text{ und } h(U'') \subset I$$

Weiter gilt $f(z) \leq g(z) \leq h(z)\ \forall z \in U''$, da $f(z), h(z) \in I$

und I ein Intervall ist, erhalten wir $g(z) \in I\ \forall z \in U''$

Also $g(U'') \subset I \subset V$

$\Rightarrow g$ ist stetig in p.