Übung 5.1:

Beweis (durch Widerspruch):

Annahme: $\mathbb{R}^2 \cup \{(\infty,0)\} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist eine stetige Fortsetzung der Multiplikation.

Sei U eine Umgebung von $x := \text{mult}((\infty,0))$ in $\overline{\mathbb{R}}$

Annahme $\Rightarrow$ $\exists$ Umgebung V von $(\infty,0)$ in $\overline{\mathbb{R}}^2$ mit

$\text{mult}(V \cap \underset{(\mathbb{R}^2 \cup \{(\infty,0)\})}{\cancel{\overline{\mathbb{R}}^2}}) \subset U$.

Nach Definition einer Umgebung gilt

$(N,\infty] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \subset V$ für $N>0$ groß genug und $\varepsilon>0$ klein genug. Aus $\mathbb{R} \subset \text{mult}((N,\infty] \times (-\varepsilon,\varepsilon))$ folgt $\text{mult}(V \cap (\mathbb{R}^2 \cup \{(\infty,0)\})) \supset \mathbb{R}$.

Fall 1: $x \in \mathbb{R}$

Für $U = (x+\sigma, x-\sigma)$ $(\sigma>0)$ folgt

$\mathbb{R} \subset \text{mult}(V \cap (\mathbb{R}^2 \cup \{(\infty,0)\}) \subset U$. ↯

Fall 2: $x = \infty$

Für $U = (M,\infty]$ folgt

$\mathbb{R} \subset \text{mult}(V \cap (\mathbb{R}^2 \cup \{(\infty,0)\}) \subset U$. ↯

Fall 3: $x = -\infty$, wie Fall 2. ↯

$\square$

Übung 5.2:

Beweis: Wir zeigen die Stetigkeit in jedem Punkt $p \in (I \cup J)$.

Fall 1: $p \in I \cap J$.

Sei $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Umgebung von $f(p)$.

$\overset{\text{Def. stetig}}{\Rightarrow}$ $\exists$ Umgebungen V und V' von p in $\overline{\mathbb{R}}$

s.d. $f(V \cap I) \subset U$ und $f(V' \cap J) \subset U$ gilt.

Setze $V'' = V' \cap V$, das ist eine Umgebung von p, siehe 3.2.11.

Damit gilt

$$\begin{aligned} f(V'' \cap (I \cup J)) &= f((V \cap V') \cap (I \cup J)) \\ &\subset f((V \cap I) \cup (V' \cap J)) \\ &= f(V \cap I) \cup f(V' \cap J) \\ &\subset U \cup U = U. \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ stetig in p.

Fall 2: $p \in (I \setminus J)$.

$p \notin J \underset{\uparrow}{\Rightarrow} (p > x \ \forall x \in J)$ oder $(p < x \ \forall x \in J)$.

Da J Intervall: $x_1, x_2 \in J$ mit $x_1 < p < x_2 \Rightarrow p \in J$ ↯

OE sei $p < x \ \forall x \in J$.

$\Rightarrow$ Da $I \cap J \neq \emptyset$, existiert ein $p' \in I$ mit $p' > p$.

Für U und V wie in Fall 1 setze

$V'' = V \cap [-\infty, p')$ $\Rightarrow$ Umgebung von p in $\overline{\mathbb{R}}$.

Damit $V'' \cap (I \cup J) = (V'' \cap I) \cup \underbrace{(V'' \cap J)}_{= V \cap \underbrace{[-\infty, p') \cap J}_{\subset (p, p') \subset I} \subset V \cap I}$

$$\begin{aligned} V'' \subset V \leftarrow &\subset (V'' \cap I) \cup (V \cap I) \\ &\subset V \cap I \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(V'' \cap (I \cup J)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{letzte Rechnung}}}{\subset} f(V \cap I) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. } V}}{\subset} U$

Fall 3: $p \in (J \setminus I)$, analog.

Übung 5.3:

Beweis:

Setze $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$.

Nach Satz 3.3.13 ist $f: M \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x/y$ stetig, wenn

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto x \cdot y$
2. $f_2 : M \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto (x, 1/y)$

stetig sind, da $f = f_1 \circ f_2$ gilt.

1.: f_1 stetig nach Beispiel 3.3.11

2.: Nach Vorlesung ist $\mathrm{inv}: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-1}$ stetig.

Für $(x,y) \in M$ sei U eine Umgebung von $f_2(x,y)$ in $\overline{\mathbb{R}^2}$. OE $U = U_1 \times U_2$ für Umgebungen U_i in $\overline{\mathbb{R}}$, von x und $1/y$. Da inv und $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ stetig, existieren Umgebungen V_1 von x und V_2 von y mit

$$\mathrm{id}(V_1 \cap \mathbb{R}) \subset U_1 \quad \text{und} \quad \mathrm{inv}(V_2 \cap \mathbb{R}^*) \subset U_2.$$

$$\Rightarrow f_2(\underbrace{V_1 \times V_2}_{\text{Umgebung von } (x,y) \text{ in } \overline{\mathbb{R}^2}} \cap M) \subset U_1 \times U_2 \Rightarrow f_2 \text{ stetig.} \quad \square$$

Alternative zu 2.:

f_2 stetig

$\overset{\text{Satz 3.3.15}}{\Leftrightarrow}$ $pr_1 \circ f_2 : M \to \mathbb{R}$ und $pr_2 \circ f_2 : M \to \mathbb{R}$ sind stetig.

Offensichtlich gilt

$$pr_1 \circ f_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ pr_1^{=pr_1} \quad \text{und} \quad pr_2 \circ f_2 = \mathrm{inv} \circ pr_{2|M}$$

mit $\mathrm{inv}: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ $x \mapsto x^{-1}$ (stetig nach Vorlesung)

und $pr_{2|M} : M \to \underbrace{pr_2(M)}_{=\mathbb{R}^*}$ (stetig nach 3.3.8 + 3.3.12)

$\overset{3.3.13}{\Rightarrow}$ $\mathrm{id}_{|\mathbb{R}} \circ pr_1$ und $\mathrm{inv} \circ pr_{2|M}$ stetig $\Rightarrow f_2$ stetig. $\square$

Übung 5.4:

Beweis:

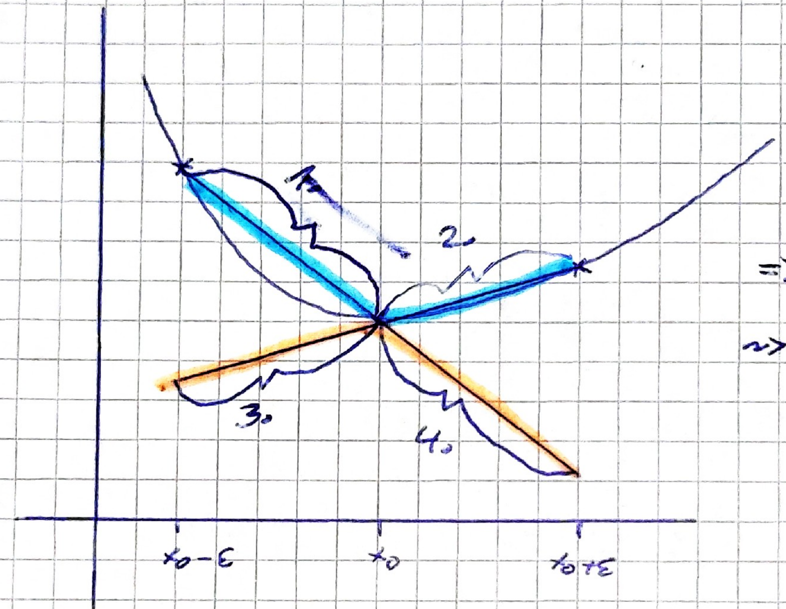
Zeige Stetigkeit in beliebigem $x_0 \in I$.

I offen $\overset{3.2.5}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0$ s.d. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$

Zeige für $t \in [0,1)$:

1. $f(x_0 - t\varepsilon) \le f(x_0) + t \cdot (f(x_0 - \varepsilon) - f(x_0))$
2. $f(x_0 + t\varepsilon) \le f(x_0) + t \cdot (f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0))$
3. $f(x_0 - t\varepsilon) \ge f(x_0) + t \cdot (f(x_0) - f(x_0 + \varepsilon))$
4. $f(x_0 + t\varepsilon) \ge f(x_0) + t \cdot (f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon))$

Anschauung ("Einquetschen"):



$\Rightarrow$ $\le f \le$ auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$\rightsquigarrow$ Verwende Übung 4.4

Beweis 1. - 4.:

1. $f(x_0 - t\varepsilon) = f((1-t)x_0 + t(x_0 - \varepsilon))$

$\overset{f \text{ konvex}}{\le} (1-t) \cdot f(x_0) + t \cdot f(x_0 - \varepsilon) = f(x_0) + t \cdot (f(x_0 - \varepsilon) - f(x_0))$ ✓

2. (analog zu 1.) $f(x_0 + t\varepsilon) = f((1-t)x_0 + t \cdot (x_0 + \varepsilon))$

$\le (1-t) \cdot f(x_0) + t \cdot f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + t \cdot (f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0))$ ✓

Vorbemerkung zu 3 und 4.: $\tau = \frac{t}{t+1}$ ist Lösung von

(1) $x_0 = \tau \cdot (x_0 - \varepsilon) + (1 - \tau) \cdot (x_0 + t\varepsilon)$

(2) $x_0 = \tau \cdot (x_0 + \varepsilon) + (1 - \tau) \cdot (x_0 - t\varepsilon)$

3. $f(x_0) \overset{(2)}{=} f\left(\frac{t}{t+1}\cdot(x_0+\varepsilon) + \frac{1}{t+1}\cdot(x_0 - t\varepsilon)\right)$
$\leq \frac{t}{t+1}\cdot f(x_0+\varepsilon) + \frac{1}{t+1}\cdot f(x_0 - t\varepsilon)$

$\Leftrightarrow (t+1) f(x_0) \leq t\, f(x_0+\varepsilon) + f(x_0 - t\varepsilon)$

$\Leftrightarrow f(x_0 - t\varepsilon) \geq f(x_0) + t\cdot(f(x_0) - f(x_0+\varepsilon))$ ✓

4. Wie 3., verwende (1).

Definiere $h \leq f \leq g$ durch

$$g:(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(x_0) + \frac{x_0-x}{\varepsilon}\cdot(f(x_0-\varepsilon) - f(x_0)) & \text{für } x \in (x_0-\varepsilon, x_0] \\ f(x_0) + \frac{x-x_0}{\varepsilon}(f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)) & \text{für } x \in [x_0, x_0+\varepsilon) \end{cases}$$

$$h:(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(x_0) + \frac{x_0-x}{\varepsilon}\cdot(f(x_0) - f(x_0+\varepsilon)) & \text{für } x \in (x_0-\varepsilon, x_0] \\ f(x_0) + \frac{x-x_0}{\varepsilon}\cdot(f(x_0) - f(x_0-\varepsilon)) & \text{für } x \in [x_0, x_0+\varepsilon) \end{cases}$$

Verwende dabei ("affinlineare") Bijektion

$(x_0-\varepsilon, x_0] \xrightarrow{\sim} [0,1),\ x \mapsto \frac{x_0-x}{\varepsilon}$

$[x_0, x_0+\varepsilon) \xrightarrow{\sim} [0,1),\ x \mapsto \frac{x-x_0}{\varepsilon}$.

Mit Übung 5.2 sind g und h stetig.

Aus 1.-4. folgt $h \leq f \leq g$.

$\overset{\text{Übung 4.4.}}{\Longrightarrow}$ f ist stetig in x_0 $\overset{x_0 \text{ bel.}}{\Longrightarrow}$ f stetig. □