Aufgabe 6.1

i) z.z: aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

<u>Variante 1: ε-N-Kriterium</u>

Es ist zu zeigen: $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : ||a_n| - |a|| < \epsilon$

Sei $\epsilon > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - a| < \epsilon$ (geht wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$). Dann gilt:

$$||a_n| - |a|| \overset{(*)}{\leq} |a_n - a| < \epsilon$$

$(*)$ kann man analog zu 2.2.13 (7) beweisen.

q.e.d.

<u>Variante 2: über Stetigkeit</u>

Der Absolutbetrag ist stetig (siehe 3.3.9).

Mit 3.6.18 folgt:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| \overset{abs.betrag \;\; stetig}{=} |\lim_{n\to\infty} a_n| = |a|$$

q.e.d.

ii) z.z: aus $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ gibt es nach ε-N-Kriterium für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq N$ gilt: $||a_n| - 0| < \epsilon$. Dann gilt auch:

$$|a_n - 0| = |a_n| = ||a_n|| = ||a_n| - 0| < \epsilon$$

q.e.d.

Aufgabe 6.2

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto a_n x^n + ... + a_0$

z.z: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0 \implies a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$

Beweis per Induktion:

<u>IA:</u>

für $n = 0$ stimmt die Aussage:

$$0 \overset{n.V.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{a_0}{x^0} = \lim_{x\to 0} a_0 = a_0$$

$\Rightarrow a_0 = 0$

<u>IV:</u>

Die Aussage gelte für n-1. Es gelte also:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{x^{n-1}} = 0 \implies a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$$

<u>IS:</u>
Es ist aus IV zu folgern, dass die Aussage auch für n gilt.
Gegeben: IV und $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ mit $f(x) = a_n x^n + ... + a_0$
zu zeigen: $a_n = ... = a_0 = 0$

Es muss gezeigt werden, dass $a_0 = 0$ ist. Falls dem so ist, gilt nämlich:

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + 0}{x^n} \overset{kürzen}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a_n x^{n-1} + ... + a_1}{x^{n-1}}$$

$$\overset{IV}{\Rightarrow} a_n = ... = a_1 = 0$$

womit der Beweis fertig wäre.

Also z.z: $a_0 = 0$
<u>Variante 1: über Stetigkeit von f(x):</u>

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^n \frac{f(x)}{x^n} \overset{3.6.28}{=} (\lim_{x\to 0} x^n) \cdot (\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n})$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n}$ ist nach Voraussetzung 0. $\lim\limits_{x\to 0} x^n$ ist offensichtlich ebenfalls 0. also ist

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \cdot 0 = 0$$

Da f stetig ist (Polynome sind stetig), folgt:

$$0 = \lim_{x\to 0} f(x) \overset{f\ stetig}{=} f(0) = a_0 \Leftrightarrow a_0 = 0$$

q.e.d.

<u>Variante 2: Einquetschen</u>
für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $||x| - |y|| \leq |x - y|$, vgl. 6.1(i). Also gilt:

$$||a_0| - | - (a_n x^n + ... + a_1 x)|| \leq |a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n| = |f(x)|$$

$$\overset{x \leq |x|}{\Rightarrow} |a_0| - |a_n x^n + ... + a_1 x| \leq |f(x)|$$

$$\Leftrightarrow |a_0| \leq |f(x)| + |a_n x^n + ... + a_1 x| \overset{\Delta-Ungl.}{\leq} |f(x)| + \sum_{k=1}^{n} |a_k||x|^k$$

Sei $M = max\{|a_1|, ..., |a_n|\}$. Sei $g : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto |a_0|$
Sei $h : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x| \frac{|f(x)|}{|x|^n} + nM|x|$.
Da $|x| < \frac{1}{2}$ für $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist $|x|^k \leq |x|$. Daher folgt mit obiger Rechnung:

$$|a_0| \leq h(x),\ \forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Da $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ folgt nach Aufgabe 6.1: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x^n|} = 0$. Da offensichtlich auch $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0} Mn|x| = 0$ gilt, folgt: $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$
Wir haben also:

$$0 \leq g(x) \leq h(x)$$

mit g und h offensichtlich stetig, dann folgt mit 3.6.26 (Grenzwert durch Einquetschen),
Dass $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

q.e.d.

Aufgabe 6.3

Gegeben: kompakte, nichtleere Intervalle $I_0 \supset I_1 \supset I_2 ...$ in $\mathbb{R}$
zu zeigen: $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$

Beweis: zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es $a_n \leq b_n$ mit $I_n = [a_n, b_n]$

$$I_{n+1} \subset I_n \Rightarrow a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

Das kann man beliebig weit fortsetzen, also gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leq b_m$$

Daraus folgt:

$$\sup((a_i)_{i \in \mathbb{N}}) \leq b_m$$

Da b_m für beliebige m eine obere Schranke von $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist, und die kleinste obere Schranke daher kleiner sein muss als beliebige b_m. Analog folgt:

$$\sup((a_i)_{i \in \mathbb{N}}) \leq \inf((b_i)_{i \in \mathbb{N}})$$

Da die Intervalle in $\mathbb{R}$ sind, existieren sup und inf.
Sei $a := \sup((a_i)_{i \in \mathbb{N}}),\ b := \inf((b_i)_{i \in \mathbb{N}})$. Es gilt.

$$a_i \leq a \leq b_i \ und \ a_i \leq b \leq b_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

$$\implies [a, b] \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

$[a, b] \neq \emptyset$ da $a \leq b$ und $[a, b]$ kompakt.

q.e.d.

Warum ist die Kompaktheit wichtig? Sei $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ eine nicht kompakte Intervallschachtelung. Dann gilt: $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n = (0, 0) = \emptyset$

Aufgabe 6.4

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit konvergenter Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.
z.z: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a

Beweis:
Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es wegen Konvergenz von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ so, dass
$\forall k \geq \tilde{N} : |a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$.
Weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, gibt es außerdem ein $N' \in \mathbb{N}$ so, dass
$\forall n, m \geq N' : |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$

Sei $N = \max\{\tilde{N}, N'\}$, dann gilt für alle $n \geq N$:

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_N} + a_{n_N} - a| \overset{\Delta-Ungl.}{\leq} |a_n - a_{n_N}| + |a_{n_N} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Da $n_N \geq n_{N'} \geq N'$
$\Longrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach ε-N-Kriterium gegen a

q.e.d.