Lösungen Blatt 7 (PH-Teil)

Aufgabe 1. Zeige, dass für jede monoton fallende Nullfolge a_k die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$konvergiert.

Beweis. Wir betrachten die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ und folgende Teilfolgen der Partialsummenfolge:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= s_0, s_2, s_4, s_6, \dots \\ s_{2n+1} &= s_1, s_3, s_5, s_7, \dots \end{aligned}$$

Es gilt:

$$s_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k - a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} - \underbrace{a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq s_{2n},$$

Weil a_k eine monoton fallende Nullfolge ist und damit $|a_{n+2}| \leq |a_{n+1}|$ gilt. Außerdem gilt damit auch

$$s_{2n} = \underbrace{(a_0 - a_1)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geq 0} + a_{2n} \geq a_{2n} \geq 0.$$

Nach dem Konvergenzkriterium der Monotonie und Beschränktheit ist also s_{2n} konvergent und der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_{2n}$ existiert.

Analoges Vorgehen für s_{2n+1} liefert die Konvergenz auch hier und insbesondere die Existenz des Grenzwerts $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$.

Insgesamt folgt mit der Konvergenz von a_k und s_{2n}:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}}_{=0} = \lim_{n\to\infty} s_{2n},$$

Und die Grenzwerte der beiden konvergenten Teilfolgen stimmen überein. □

Aufgabe 2. Zeige, dass $e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Beweis. Durch Widerspruch: Nehme an, dass $e \in \mathbb{Q}$ gilt, dann existieren $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $e = \frac{p}{q}$.
Wegen $2 < e < 3$ sind p und q positive ganze Zahlen und $e \notin \mathbb{Z}$, also folgt

insbesondere $q > 1$.

In der Reihendarstellung von $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ erweitern wir mit $q!$:

$$\underbrace{q!e}_{\in\mathbb{N}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q!}{k!} = \underbrace{\frac{q!}{0!} + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \cdots + \frac{q!}{q!}}_{\in\mathbb{N}} + \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \ldots.$$

Die linke Seite ist nach Annahme eine natürliche Zahl wegen $q!e = p(q-1)$, und die erste Hälfte der rechten Seite ist ebenfalls natürlich, da für alle natürliche Zahlen $n \leq q$ gilt $n|(q!)$.

Für die zweite Hälfte der rechten Seite sehen wir

$$0 < \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \cdots < 1.$$

Die Positivität ist klar wegen der Positivität aller Summenglieder. Für die Beschränkung nach oben durch 1 bedenke $q > 1$ und betrachte:

$$\begin{aligned}
\frac{q!}{(q+1)!} &= \frac{1}{q+1} < \frac{1}{2} \\
\frac{q!}{(q+2)!} &= \frac{1}{(q+1)(q+2)} < \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4} \\
\frac{q!}{(q+3)!} &= \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} < \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Die zweite Hälfte wird also durch eine geometrische Summe beschränkt, für die nach Vorlesung gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Also haben wir

$$\underbrace{q!e}_{\in\mathbb{N}} = \underbrace{\frac{q!}{0!} + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \cdots + \frac{q!}{q!}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \ldots}_{\in(0,1)},$$

und damit einen Widerspruch.

$\square$

Aufgabe 3. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe und $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Umordnung mit der Eigenschaft $|u(k) - k| < \infty \ \forall k \in \mathbb{N}$.
Zeige, dass dann auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_{u(k)}$ konvergiert und dass gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_{u(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis. Zunächst gilt:

$$|\sum_{k=1}^{n} a_{u(k)} - \sum_{k=1}^{n} a_k| = |\sum_{k \leq n, u(k) > n} a_{u(k)} - \sum_{k \leq n, u^{-1}(k) > n} a_k|,$$

alle übrigen Summenglieder heben sich gegenseitig auf.

Weiter gilt nach Dreiecksungleichung

$$|\sum_{k \leq n, u(k) > n} a_{u(k)} - \sum_{k \leq n, u^{-1}(k) > n} a_k| \leq \sum_{k \leq n, u(k) > n} |a_{u(k)}| + \sum_{k \leq n, u^{-1}(k) > n} |a_k|$$

Wegen der Beschränktheit von $|u(k) - k|$ wähle nun ein festes $R \in \mathbb{R}$, so dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt $R > |u(k) - k|$.
Damit gilt:

$$\sum_{k \leq n, u(k) > n} |a_{u(k)}| + \sum_{k \leq n, u^{-1}(k) > n} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+R} |a_k| + \sum_{k=n-R+1}^{n} |a_k|$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, ist insbesondere a_n eine Nullfolge, d.h. es existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_m| < \epsilon \ \forall m > N$. Wenn wir n so gewählt hatten, dass $|a_m| < \epsilon$ für $m > n - R + 1$, bekommen wir

$$\sum_{k=n+1}^{n+R} |a_k| + \sum_{k=n-R+1}^{n} |a_n| \leq R\epsilon + R\epsilon = 2R\epsilon$$

und wir sehen, dass beide Reihe den gleichen Grenzwert haben.

$\square$

$\boxed{7.3}$ ①

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

z.z. $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ konvergiert, aber nicht absolut}\right) \Rightarrow \left(\forall x\in\mathbb{R}\ \exists \text{ Umordnung } u: \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \text{ mit } \sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} = x\right)$

$\boxed{\text{Beweis}}$

Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergent und $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \infty$.

Definiere $p, m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$p(a) := \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}, \quad m(a) := \begin{cases} a, & a < 0 \\ 0, & a \geq 0 \end{cases}$$

d.h. $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a = p(a) + m(a)$

$$\hookrightarrow \infty = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{p(a_n)}_{\geq 0} \underbrace{- m(a_n)}_{\geq 0} = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(a_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} -m(a_n)$$

D.h. mindestens eine der beiden Reihen $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(a_n)$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} -m(a_n)$

muss konvergieren.

Nehmen wir an, $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(a_n)$ konvergiert. und

$\sum_{n\in\mathbb{N}} p(a_n)$ divergiert

$\hookrightarrow \forall M \in \mathbb{N} \; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m \in \mathbb{N}, m \geq N:$

$$\sum_{n=0}^{m} p(a_n) > M \quad \wedge \quad \alpha - \varepsilon < \sum_{k=0}^{m} m(a_k) < \alpha + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{m} a_k > M - \alpha \quad \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \text{ divergiert } \lightning$$

Analog, falls $\sum_{n \in \mathbb{N}} m(a_n)$ divergiert und $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(a_n)$ konvergiert.

D.h. sowohl $\sum p(a_n)$ als auch $\sum m(a_n)$ divergieren.

Setze nun mit $x \in \mathbb{R}$ beliebig

- $u(0) = 0$
- $S_m := \sum_{k=0}^{m} a_{u(k)}$, $S_0 := a_0$
- $u(n) := \begin{cases} \min(k \in \mathbb{N} \mid a_k \geq 0, \; k \notin u([1, \ldots, n-1])), & S_{n-1} \leq x \\ \min(k \in \mathbb{N} \mid a_k < 0, \; k \notin u([1, \ldots, n-1])), & S_{n-1} > x \end{cases}$

$\underline{\text{Z.z.}}$ $\lim_{m \to \infty} S_m = x$

Es gilt: $|S_{m+1} - x| \leq |S_m - x|$, wenn wir x nicht überschreiten

$|S_{m+1} - x| \leq |a_{u(m+1)}|$, wenn wir x überschreiten

Da $a := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (3)

D.h. ebenso $\lim_{n\to\infty} a_{u(n)} = 0$ und somit

Es folgt mit $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von „Überschreitung von X"

$$\lim_{n\to\infty} |S_n - x| \le \lim_{k\to\infty} |S_{i_k} - x| \le \lim_{k\to\infty} |a_{u(i_k)}| = 0$$

D.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} = x$ ∎

$\boxed{7.4}$ ④

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci-Folge aus Übung 1.4.

Z.z.: $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{f_{i+1}}{f_i} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{\text{Beweis}}$

Aus Übung 1.4 wissen wir mit $q := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\bar{q} := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} q^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{q}^n$

zeige $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = q$

Es gilt

$$\left| \frac{f_{n+1}}{f_n} - q \right| = \left| \frac{q^{n+1} - \bar{q}^{n+1}}{q^n - \bar{q}^n} - q \right|$$

$$= \left| \frac{q\bar{q}^n - \bar{q}^{n+1}}{q^n - \bar{q}^n} \right| \overset{\otimes}{\leq} \frac{|q|\,|\bar{q}|^n + |\bar{q}|^{n+1}}{\frac{1}{2}|q|^n} \leq 2|q|^{-n+1} + 2|q|^{-n} \longrightarrow 0$$

$\otimes$ $\quad |q| > 1 \quad , \quad |\bar{q}| < 1$

$\Rightarrow$ Für $n \in \mathbb{N}$ groß genug gilt

$|\bar{q}|^n \leq \frac{1}{2}|q|^n$

$\boxed{7.6}$

$\sum_{i \in I} a_i = a$ für jede Umgebung U von a $\exists I_U \subset I$

endliche Teilmenge s.d. $\forall I \supset J \supset I_U$ endlich: $\sum_{j \in J} a_j \in U$ ⊛

Angenommen $a = \sum_{i \in I} a_i = b$ mit $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \exists$ Umgebungen U_a, U_b von a bzw. b mit $U_a \cap U_b = \emptyset$

$\overset{⊛}{\hookrightarrow}$ $\exists I_{U_a}, I_{U_b} \subset I$ endlich s.d. $\forall I \supset J_a \supset I_{U_a}, I \supset J_b \supset I_{U_b}$:

$\sum_{j \in J_a} a_j \in U_a$, $\sum_{j \in J_b} a_j \in U_b$

Setze nun $J := I_{U_a} \cup I_{U_b}$ $\Rightarrow$ $|J| < \infty$ und

$\sum_{i \in J} a_i \in U_a \cap U_b = \emptyset$ $\lightning$ ∎

Mit CamScanner gescannt