Aufgabe 8.1

Es gilt $w^2 = \left(\frac{1+z}{|1+z|}\right)^2 = \frac{(1+z)^2}{(1+z)(1+\bar{z})} = \frac{1+z}{1+\bar{z}}$

Es gilt: $\frac{1+z}{1+\bar{z}} = z \iff 1+z = z(1+\bar{z})$

$$\iff 1+z = z + \underbrace{z\bar{z}}_{=1}$$

$$\Rightarrow w^2 = z$$

Angenommen z hat eine weitere Quadratwurzel $w' \in \mathbb{C}$

Dann gilt $(w')^2 = z = w^2$

$$\iff (w')^2 - w^2 = 0$$

$$\iff (w'-w)(w'+w) = 0$$

$$\Rightarrow w' = w \text{ oder } w' = -w$$

$$\mathrm{Re}(w') > 0 \qquad \mathrm{Re}(w') < 0$$

Aufgabe 8.3

$\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz}$ f. $z = a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$

$$\iff e^{ia-b} = e^{-ia+b}$$

Es gilt $|e^{iz}| = \underbrace{|e^{ia}|}_{=1}|e^{-b}| = e^{-b}$ und analog $|e^{-iz}| = e^{b}$

$$\Rightarrow e^{b} = e^{-b} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Nr. 8.4}}$

Z.z.: $\mathrm{inv}: \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ ist stetig

Beweis

Zunächst bemerken wir, dass mit

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{C}, \quad (x,y) \mapsto x+iy$$

gilt $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vermöge Φ. Damit erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^\times \arrow[r, "\mathrm{inv}"] & \mathbb{C}^\times \\
\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "\widetilde{\mathrm{inv}}"] & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \arrow[u, "\Phi"]
\end{tikzcd}$$

wobei $\widetilde{\mathrm{inv}} := \Phi \circ \mathrm{inv} \circ \Phi^{-1}$. Nach Übung 2.4 gilt

$$\mathrm{inv}(a+ib) = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

d.h.

$$\widetilde{\mathrm{inv}}((a,b)) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2} \right)$$

ist stetig in beiden Komponenten, d.h. $\widetilde{\mathrm{inv}}$ ist stetig ∎

Nichtexistenz stetiger Wurzelfunktionen (8.6)

Gäbe es eine stetige Funktion $w: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w(z)^2 = z$ $\forall z \in \mathbb{C}$,

so folgt $w(z^2) = \pm z$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Damit wäre

$$\varepsilon: \mathbb{C}^\times \to \{\pm 1\}, \quad z \mapsto \frac{w(z^2)}{z}$$

eine stetige Abbildung mit $\varepsilon(-z) = -\varepsilon(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}^\times$

B: $\nexists$ derartiges $\varepsilon: \mathbb{C}^\times \to \{\pm 1\}$

Beweis

Angenommen dass $\varepsilon: \mathbb{C}^\times \to \{\pm 1\}$ existiert in der Tat.

Setze $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$, $t \mapsto \exp(it)$, was eine stetige Funktion ist (vgl. 4.5.7)

$\overset{3.3.16}{\hookrightarrow}$ $\varepsilon \circ \phi: \mathbb{R} \to \{\pm 1\}$ ist stetig als Komposition stetiger Abbildungen

Es folgt

$$(\varepsilon \circ \phi)(\pi) = \varepsilon(\exp(i\pi)) = \varepsilon(-1) = -\varepsilon(1) = -(\varepsilon \circ \phi)(0)$$

Da $\mathrm{im}(\varepsilon \circ \phi) \subset \{\pm 1\}$ gilt $\mathrm{sign}((\varepsilon \circ \phi)(\pi)) \neq \mathrm{sign}((\varepsilon \circ \phi)(0))$

ZWS, $\varepsilon \circ \phi$ stetig

$\hookrightarrow$ $\exists z \in [0, \pi]: (\varepsilon \circ \phi)(z) = 0$ ↯ $\mathrm{im}(\varepsilon \circ \phi) \subset \{\pm 1\}$

D.h. die Annahme war falsch und es ex. kein derartiges ε ■

$\boxed{\text{Nr. 8.2}}$

z.z. $\forall v \in \mathbb{R}: \quad \sin^3(v) = \frac{3}{4}\sin(v) - \frac{1}{4}\sin(3v)$

$\boxed{\text{Beweis}}$

Sei $v \in \mathbb{R}$

Eulersche-Gleichung

$$\text{(I)} \quad \cos(3v) + i\sin(3v) = \exp(i3v)$$
$$= (\exp(iv))^3$$
$$= (\cos(v) + i\sin(v))^3$$

Binomische Formel

$$= \cos^3(v) + 3i\cos^2(v)\sin(v) + 3\cos(v)\sin^2(v) + i^3\sin^3(v)$$

$$= (\cos^3(v) + 3\cos(v)\sin^2(v)) + i(3\cos^2(v)\sin(v) - \sin^3(v))$$

Insbesondere müssen also die Imaginärteile übereinstimmen, d.h.

$$\sin(3v) = \operatorname{Im}(\cos(3v) + i\sin(3v))$$

$$\overset{\text{(I)}}{=} \operatorname{Im}\left((\cos^3(v) + 3\cos(v)\sin^2(v)) + i(3\cos^2(v)\sin(v) - \sin^3(v))\right)$$

$$= 3\cos^2(v)\sin(v) - \sin^3(v)$$

$\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$

$$= 3(1 - \sin^2(v))\sin(v) - \sin^3(v)$$

$$= 3\sin(v) - 4\sin^3(v)$$

$\boxed{8.5}$

Z: (1) $\exp: \mathbb{R} + (-\pi, \pi) i \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist Bijektion induziert

durch die Exponentialfunktion

(2) Ferner sei eine Formel für die Restriktion der

Umkehrabbildung auf die obere Halbebene $\mathbb{R} + i\mathbb{R}_{>0}$

angegeben

$\boxed{\text{Beweis}}$

Zu (1) Zunächst zur Injektivität.

Seien $a, \tilde{a}, b, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ mit

$$\exp(a+ib) = \exp(\tilde{a}+i\tilde{b}) \quad \circledast$$

$$\Rightarrow \exp(a) = |\exp(a+ib)| \overset{\circledast}{=} |\exp(\tilde{a}+i\tilde{b})| = \exp(\tilde{a})$$

d.h. $a = \tilde{a}$

$$\Rightarrow \exp(ib) = \exp(-a)\exp(a+ib) \overset{a=\tilde{a},\ \circledast}{=} \exp(-\tilde{a})\exp(\tilde{a}+i\tilde{b}) = \exp(i\tilde{b})$$

D.h. $b = b' + 2\pi\mathbb{Z}$, d.h. $[b] = [b']$

Damit gilt auch $a + [b] = \tilde{a} + [\tilde{b}]$ ✓

Nun zur Surjektivität. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \Rightarrow z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$

$\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{R}: \exp(a) = |z|$, da $\exp|_{\mathbb{R}}$ bijektiv ist.

Da $\frac{z}{|z|} \in S^1$ gilt, $\exists\, b \in \mathbb{R}: \frac{z}{|z|} = \exp(ib)$ nach 4.5.10

Ferner können wir OE $b \in (-\pi, \pi]$ wählen. Wegen

$\frac{z}{|z|} \neq -1$ gilt $b \neq \pi$, d.h. $b \in (-\pi, \pi)$

Damit folgt $\exp(a+ib) = z$

Damit ist $\exp(\cdot)$ bijektiv.

<u>Zu ②</u>

In der Umkehrfunktion von exp haben wir für

$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ $\quad \exp^{-1}(z) = a + ib$ mit

$a = \ln(|z|)$ und $\exp(ib) = \frac{z}{|z|}$

Eulersche Formel

$\leadsto$ (I) $\cos(b) = \mathrm{Re}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$

(II) $\sin(b) = \mathrm{Im}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$

Da $\mathrm{Im}(z) > 0$ gilt $\frac{1}{\tan(b)} = \frac{\cos(b)}{\sin(b)} \overset{(I),(II)}{=} \frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}$

Da ferner $\frac{1}{\tan(b)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$ gilt, folgt und

$$\frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

d.h. $b = -\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}\right) + \frac{\pi}{2}$ $\quad \square$