Musterlösung Blatt 9

Aufgabe 1

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen.

z.z. Es gilt genau dann $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, wenn es für jedes $M \in \mathbb{R}$ ein $N = N_M \in \mathbb{R}$ gibt mit $n > N \Rightarrow a_n < M$.

Beweis: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow$ Für jede Umgebung U von $-\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ gibt es eine Umgebung V von ∞ in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ so dass gilt $a_n \in U \ \forall n \in V$. (*)

U Umgebung von $-\infty \Rightarrow [-\infty, M) \subset U$ für ein $M \in \mathbb{R}$

Wir können annehmen $U = [-\infty, M)$.

V Umgebung von ∞ in $\mathbb{N} \cup \{\infty\} \Rightarrow [N, \infty] \cap \mathbb{N} \subset V$

$\Rightarrow n \in [N, \infty] \cap \mathbb{N}$ gdw. $n \geq N$, $a_n \in U$ gdw. $a_n < M$

also $n > N \Rightarrow a_n \in U \Rightarrow a_n < M$

Da (*) für jede Umgebung U von $-\infty$ gilt, finden wir für jedes $M \in \mathbb{R}$ ein U mit $[\infty, M) \subset U$ □

Aufgabe 2

z.z. Jede endliche Vereinigung von Kompakta ist kompakt.

(K ist kompakt gdw. jede Folge in K eine konvergente Teilfolge hat.)

Beweis: Seien für $i \in \{1, \dots, m\}$ K_i Kompakta, $K := \bigcup_{i=1}^{m} K_i$.

Sei (x_i) Folge in K, (x_i) hat also unendlich viele Glieder in K.

$\Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, m\}$ so dass gilt: K_j enthält unendlich viele Glieder von (x_i). Diese bilden Folge (x_n)

K_j kompakt $\Rightarrow \exists$ Teilfolge (x_n) die in K_j konvergiert.

$\Rightarrow (x_i)$ hat konvergente Teilfolge in K

$\Rightarrow K$ ist kompakt. □

Aufgabe 3

z.z. Das Bild eines Kompaktums $K \subset \overline{\mathbb{R}}^m$ unter einer stetigen Abbildung $K \to \overline{\mathbb{R}}^n$ ist kompakt.

Beweis: Sei (x_i) Folge in $f(K)$ ($f: K \to \overline{\mathbb{R}}^n$ stetig)

$\forall i \in \mathbb{N}$ sei $y_i \in f^{-1}(x_i) \Rightarrow (y_i)$ Folge in K

K kompakt $\Rightarrow \exists (y_{i_k})$ konvergente Teilfolge von (y_i) in K

$f(\lim_{k\to\infty} y_{i_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{i_k}) = \lim_{k\to\infty} x_{i_k}$

(y_{i_k}) konvergent in $K \Rightarrow \lim_{k\to\infty} y_{i_k}$ existiert, $y := \lim_{k\to\infty} y_{i_k}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{i_k} = f(y) \Rightarrow x_{i_k}$ konvergent in $f(K)$

$\Rightarrow f(K)$ kompakt □

Aufgabe 4

(i) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ nicht leer und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

z.z. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $\int f = (b-a) f(\xi)$.

Beweis: Seien $m := \inf(f([a,b]))$, $M := \sup(f([a,b]))$

$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$ (*)

$[a,b]$ nicht leer $\Rightarrow b \geq a$. Falls $b = a$, dann $0 \leq \int_a^b f \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f = 0$ ✓

Falls $b > a$, dann (*) $\Leftrightarrow m \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq M$

ZWS $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \int_a^b f \cdot \frac{1}{b-a} \Rightarrow \int f = (b-a) f(\xi)$ □

(ii) Sei g eine weitere stetige Funktion $g: [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

z.z. Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $\int fg = f(\xi) \int g$.

Beweis: $g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$. Mit m, M wie oben folgt $m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$ (*)

1\. Fall: $\int g = 0 \Rightarrow \int fg = 0$ und die Aussage gilt

2\. Fall: $\int g > 0$

(*) $\Leftrightarrow m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M$

ZWS $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \int_a^b fg \cdot \frac{1}{\int_a^b g} \Rightarrow \int fg = f(\xi) \int g$. □

Aufgabe 5 (Bonus)

z.z. Jede monotone stetige Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\exists M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq M \ \forall x \in \mathbb{R}$, ist gleichmäßig stetig.

(gleichmäßig stetig: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.d. $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$)

Beweis: OBdA sei f monoton steigend

f ist gleichmäßig stetig auf jedem Kompaktum (aus Vorlesung)

Sei $M = \sup f(\mathbb{R})$, $m = \inf f(\mathbb{R})$, $M \in \mathbb{R}$ da f beschränkt.

$M = \lim_{x \to \infty} f(x)$ da f monoton steigend

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N' > 0$ so dass $x > N' \Rightarrow f(x) > M - \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N'' > 0$ so dass $x < -N'' \Rightarrow f(x) < m + \varepsilon$

Sei $N = \max\{N', N''\} \Rightarrow$ f ist gleichmäßig stetig auf $[-N-1, N+1]$

(*) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ so dass $\forall x, y$ mit $|x|, |y| < N+1$ und $|x-y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Jetzt nehmen wir x, y mit $|x-y| < \delta$

$\Rightarrow$ 1. Fall: $x, y > N$, 2. Fall: $x, y < -N$, 3. Fall: $|x|, |y| < N+1$

1. Fall: $M \geq f(x), f(y) > M - \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

2. Fall: $m \leq f(x), f(y) < m + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

3. Fall: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt aus (*)

□