Lösungen Blatt 0

Aufgabe 1. Man erweitere das Pascal'sche Dreieck um die benötigten zusätzlichen Zeilen und stelle $(x+y)^7$ als Summe von Monomen dar.

Lösung:

n=0								1							
n=1							1		1						
n=2						1		2		1					
n=3					1		3		3		1				
n=4				1		4		6		4		1			
n=5			1		5		10		10		5		1		
n=6		1		6		15		20		15		6		1	
n=7	1		7		21		35		35		21		7		1

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$$

Aufgabe 2. Zeige durch vollständige Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ als Produkt endlich vieler Primzahlen geschrieben werden kann.

Beweis. Induktionsbeweise kann man sich gut als Domino-Parcour vorstellen. Wir möchten zeigen, dass alle Dominosteine fallen werden (also dass die Aussage für alle Zahlen $n \geq 2$ gilt), und erreichen dies in drei Schritten:

Induktionsanfang (IA): Die Aussage gilt trivialerweise für $n = 2$.
Wir haben gezeigt, dass der erste Dominostein sicher fallen wird.

Induktionsvoraussetzung (IV): Die Aussage gelte für alle $n \leq N$.
Wir gehen davon aus, unsere Aussage wäre bereits bewiesen für alle Zahlen kleiner gleich irgendeinem $N \in \mathbb{N}$, also dass alle Dominosteine bis zu einem bestimmten Punkt fallen werden.

Induktionsschritt (IS): Wir wollen nun beweisen, dass wenn *alle Dominosteine bis zu diesem Punkt fallen, dass* dann *auch der nächste in der Reihe fallen wird. Wir zeigen also, dass unter der IV nun auch automatisch die Gültigkeit der Aussage für $N+1$ folgen muss.*

Dafür machen wir eine Fallunterscheidung.

Fall 1. $N+1$ ist eine Primzahl. Dann sind wir bereits fertig, da diese Zahl dann offensichtlich ein "Produkt endlich vieler Primzahlen" ist.

Fall 2. $N+1$ ist keine Primzahl. Dann hat $N+1$ echte Teiler, wir können also zwei Zahlen $t_1, t_2 < N$ finden, so dass $N+1 = t_1 t_2$ gilt. Für diese beiden Teiler t_1 und t_2 gilt jedoch die *Induktionsvoraussetzung*, also können wir diese als Produkt endlich vieler Primzahlen $p_1 \cdot p_2 \dots p_i$ bzw. $q_1 \cdot q_2 \dots q_j$ schreiben:

$$t_1 = p_1 \cdot p_2 \dots p_i$$
$$t_2 = q_1 \cdot q_2 \dots q_j$$

Damit haben wir aber auch eine Schreibweise für $N+1$ und sind fertig:

$$N+1 = t_1 \cdot t_2 = (p_1 \cdot p_2 \dots p_i) \cdot (q_1 \cdot q_2 \dots q_j)$$

□

Aufgabe 3. Zeige $1 - x^{n+1} = (1-x) \sum_{k=0}^{n} x^k$.

Variante 1: Direkter Beweis

Beweis.

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k &= (1-x)(1+x+\dots+x^n) \\ &= (1+x+x^2+\dots+x^n) \\ &\quad -(x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1}) \\ &= 1-x^{n+1}.\end{aligned}$$

□

Variante 2: Induktion nach n

Beweis. IA: Die Aussage gilt trivialerweise für $n = 1$.

IV: Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

IS: Dann folgt auch die Aussage für $n+1$, denn es gilt:

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k + (1-x)x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1} + (1-x)x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2} \\ &= 1 - x^{n+2}\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4. Sei α beliebig und $k \geq 1$. Zeige:

$$\binom{\alpha}{k-1} + \binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha+1}{k}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha}{k-1} + \binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \ldots (\alpha-(k-2))}{(k-1)!} + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \ldots (\alpha-(k-1))}{k!} \\
&= \frac{k \cdot \alpha \cdot (\alpha-1) \ldots (\alpha-k+2)}{k \cdot (k-1)!} + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \ldots (\alpha-k+1)}{k!} \\
&= \frac{k \cdot \alpha \cdot (\alpha-1) \ldots (\alpha-k+2) + \alpha \cdot (\alpha-1) \ldots (\alpha-k+1)}{k!} \\
&= \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \ldots (\alpha-k+2) \cdot (k+(\alpha-k+1)}{k!} \\
&= \frac{(\alpha+1) \cdot \alpha \cdot (\alpha-1) \ldots (\alpha-k+2) \cdot}{k!} \\
&= \binom{\alpha+1}{k}
\end{aligned}$$

$\square$