Topologie
SoSe 2022 — Übungsblatt 11

Ausgabe 11.07.22 Dozent: Prof. Wolfgang Soergel
Abgabe 18.07.22 Tutorium: Dr. Leonardo Patimo

Aufgabe 11.1: Jede freie Operation einer endlichen Gruppe auf einem Hausdorffraum ist topologisch frei.
Leiten Sie eine Überlagerung von der Sphäre S^n zum projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ab und beschreiben Sie ihre Deckstransformationen.

(4 Punkte)

Aufgabe 11.2: Für $n \geq 1$ betrachte man den Kreis $K_n \subset \mathbb{R}^2$ mit Radius $1/n$, der rechts von der y-Achse liegt und diese im Ursprung berührt. Man zeige, daß der Raum $X = \bigcup_{n\geq 1} K_n$ keine schleiffüllende Überlagerung besitzt. Dieser sogenannte *Kreisraum*, auch bekannt unter dem Namen *Hawaiischer Ohrring*, dient oft als Gegenbeispiel.

(4 Punkte)

Definition. Eine zusammenhängende Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$ derart, dass die Gruppe der Deckbewegungen transitiv auf der Faser $p^{-1}(x)$ über jedem Punkt $x \in X$ operiert, nennen wir eine *Galois-Überlagerung*.

Aufgabe 11.3: Man zeige:

a) jede zusammenhängende zweifache Überlagerung ist Galois.

b) Sei $p : E \to B$ eine zusammenhängende dreifache Überlagerung. Dann ist die Gruppe der Deckstransformationen $\mathrm{Top}_B^\times(E)$ entweder trivial oder isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, und E ist Galois genau dann, wenn $\mathrm{Top}_B^\times(E) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

c) Geben Sie Beispiel für eine zusammenhängende dreifache Galois-Überlagerung und für eine zusammenhängende dreifache Nicht-Galois-Überlagerung der Figur 8.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 11.4: (**Normale Hülle**.) Man zeige, dass jede zusammenhängende lokal zusammenhängende surjektive endliche Überlagerung selbst eine endliche Überlagerung besitzt derart, dass die Verknüpfung der beiden Überlagerungsabbildungen eine Galois-Überlagerung ist.
Hinweis: Man bilde über der Basis das Faserprodukt einiger Kopien unserer Überlagerung mit sich selbst und nehme darin eine geeignete Zusammenhangskomponent. Dann zeigt man, dass das Bild jeder diagonalen Einbettung diese zusammenhängende Komponente nicht trifft.

(4 Punkte)