Topologie
SoSe 2022 — Ubungsblatt 2

Ausgabe 02.05.22 — Dozent: Prof. Wolfgang Soergel
Abgabe 09.05.22 — Tutorium: Dr. Leonardo Patimo

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/ss22top.html`

Aufgabe 2.1: Ist ein $\mathbb{R}^n$ homöomorph zur reellen Geraden $\mathbb{R}$, so folgt $n = 1$. In Formeln gilt also $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R} \implies n = 1$.
Hinweis: Das Komplement eines beliebigen Punktes in $\mathbb{R}$ ist nicht wegzusammenhängend.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.2: Betrachten Sie die Menge der rational Zahlen $\mathbb{Q}$ als topologische Raum. Zeigen Sie:

1. $\mathbb{Q}$ ist *total unzusammenhängend* (d.h. die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{Q}$ genau die einelementigen Teilmengen sind)
2. $\mathbb{Q}$ ist nicht *diskret*.
3. Kein Punkt von $\mathbb{Q}$ besitzt eine kompakte Umgebung.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.3: Seien X und Y topologische Räume mit Y kompakt. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$p : X \times Y \to X$$
$$(x, y) \mapsto x$$

abgeschlossen ist. (Eine Abbildung $p : Z_1 \to Z_2$ ist abgeschlossen, wenn für jedes abgeschlossene $A \subset Z_1$ auch $p(A) \subset Z_2$ abgeschlossen ist).

(4 Punkte)

Aufgabe 2.4: Man zeige: Gegeben ein topologischer Raum X können wir auf $X \sqcup \{\infty\}$ eine Topologie T erklären durch die Vorschrift

$$T := \{U \mid U \circeq X\} \sqcup \{U \sqcup \{\infty\} \mid U \circeq X \text{mit } X \setminus U \text{ kompakt}\}.$$

Man zeige, dass $X \sqcup \{\infty\}$ mit dieser Topologie ein kompakter topologischer Raum ist. Er heißt die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von X.
Man zeige weiter, dass die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ homöomorph zur Kreislinie S^1 ist.

(4 Punkte)