Topologie
SoSe 2022 — Ubungsblatt 4

Ausgabe 16.05.22 Dozent: Prof. Wolfgang Soergel
Abgabe 23.05.22 Tutorium: Dr. Leonardo Patimo

Aufgabe 4.1: Sei X, Y topologische Räume mit Y Hausdorff.

1. Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist der Graph
$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y.$$
von f eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$.

2. Ist $f : Y \to Y$ stetig, dann sind die Fixpunkte von f eine abgeschlossene Teilmenge von Y.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.2: Jede abgeschlossene Teilmenge eines lokal kompakten Raums ist lokal kompakt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.3: Ein beliebiges Produkt von Hausdorffräumen ist Hausdorff.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.4: Sei Z die Verklebung von zwei Kopien von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Das bedeutet: Wir nehmen $X = \mathbb{R}$ und $Y = \mathbb{R}$ und definieren $Z := X \sqcup Y/\sim$, wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$ erzeugt von
$$x \sim y \iff x = y \neq 0 \text{ für } x \in X \text{ und } y \in Y$$
ist.) Man zeige:
Jeder Punkt von Z besitzt eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, aber Z ist nicht Hausdorff und damit keine topologische Mannigfaltigkeit.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 4.5: Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum läßt sich jede auf einer kompakten Teilmenge definierte stetige reellwertige Funktion stetig auf den ganzen Raum fortsetzen, und das sogar zu einer Funktion mit kompaktem Träger.

(4 Punkte)