# Topologie
# SoSe 2022 — Übungsblatt 8

**Ausgabe** 20.06.22 Dozent: Prof. Wolfgang Soergel
**Abgabe** 27.06.22 Tutorium: Dr. Leonardo Patimo

**Aufgabe 8.1:** Man zeige: Ist $i : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung eines Teilraums und $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung, so ist das folgende Diagramm kartesisch in der Kategorie der topologischen Räume:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(Z) \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

(4 Punkte)

**Aufgabe 8.2:** Ist $M$ eine zusammenhängende $d$-Mannigfaltigkeit der Dimension $d \geq 3$ und $E \subset M$ eine endliche Teilmenge, so induziert die Einbettung

$$M \setminus E \hookrightarrow M$$

einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen.

(4 Punkte)

**Aufgabe 8.3:** Man zeige: die Fundamentalgruppe des Komplements einer Kreislinie im $\mathbb{R}^3$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$.

(4 Punkte)

**Aufgabe 8.4:** Sei $X$ ein zusammenhängender topologischer Raum und $U, V \subseteq X$ offene Teilmengen die $X$ überdecken. Ist $U \cap V$ wegzusammenhängendend und $V$ zusammenziehbar, dann induziert die Einbettung $U \hookrightarrow X$ einen surjektiven Homomorphismus

$$\pi_1(U, x) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x)$$

für alle $x \in U \cap V$. Der Kern des obigen Homomorphismus ist gleich dem kleinsten Normalteiler von $\pi_1(U, x)$, der das Bild von $\pi_1(U \cap V, x)$ unter dem Homomorphismus $\pi_1(U \cap V, x) \to \pi_1(U, x)$ enthält.

(4 Punkte)